

УДК 531.322

DOI 10.34822/1999-7604-2021-2-53-59

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ

Л. А. Прокудина, М. П. Вихирев ✉

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

✉ E-mail: vikhirevmp@susu.ru

В работе представлены результаты численного моделирования течения тонкого слоя жидкости со свободной поверхностью при умеренных числах Рейнольдса в рамках дифференциального уравнения в частных производных для состояния свободной поверхности пленки. Коэффициенты уравнения включают различные физико-химические факторы, в частности поверхностное натяжение и градиенты температуры.

Проведены вычислительные эксперименты для тонкого слоя вязкой жидкости; исследованы режимы свободного стекания, испарения, противотока. Найдены значения волновых характеристик. Выделены течения жидкой пленки с максимальным значением инкремента, такие режимы зафиксированы в экспериментальных исследованиях других ученых. Представлены результаты моделирования на Python волновой поверхности жидкой пленки. Полученные результаты моделирования могут быть использованы при конструировании или модернизации существующего оборудования, а также при разработке технологических процессов в пленках жидкости.

Ключевые слова: испарение, жидкая пленка, постоянное касательное напряжение, неустойчивость, параметр Марангони, умеренные числа Рейнольдса.

NUMERICAL SIMULATION OF UNSTABLE FLOW REGIMES OF A NON-ISOTHERMAL LIQUID FILM

L. A. Prokudina, M. P. Vikhirev ✉

South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

✉ E-mail: vikhirevmp@susu.ru

The paper presents the results of numerical simulation of the flow of a thin liquid layer with a free surface. The simulation was performed at moderate Reynolds numbers within the framework of the partial differential equation for the state of the free surface of the film. Equation coefficients include various physicochemical factors, namely surface tension, and temperature gradients.

Computational experiments are carried out for a thin layer of a viscous liquid. The modes of free runoff, evaporation and counter flow are investigated. The values of the wave characteristics are found. The flows of a liquid film with the maximum value of the growth rate are identified. Such modes have been recorded in experimental studies by other scientists. The results of modeling the wave surface of a liquid film in Python are presented. The results can be used in the design or modernization of existing equipment, as well as in the development of technological processes in liquid films.

Keywords: evaporation, liquid film, constant shear stress, instability, Marangoni number, moderate Reynolds numbers.

Введение

Тонкие пленки жидкости за счет малого термосопротивления и большой поверхности контакта эффективны при межфазном тепломассообмене. Благодаря этому они широко применяются в промышленности: пленочные аппараты используются в производстве отдельных видов пластмасс, химических и пищевых продуктов.

При разработке технологических процессов в пленочных аппаратах необходимо учитывать влияние различных физико-химических факторов на характеристики пленочного течения [1–6]. К таким факторам относится испарение жидкости и постоянное касательное напряжение на свободной поверхности пленки, возникающее при движении потока газа над слоем жидкости.

Цель работы – исследование методами численного моделирования волновых характеристик течения жидкой пленки в условиях свободного стекания пленки, испарения, прототока при умеренных числах Рейнольдса.

Постановка задачи

Рассмотрим вертикальное течение жидкой пленки для значений числа Рейнольдса $1 \leq Re \leq 15$ по гладкой непроницаемой поверхности в системе координат OXY как при свободном стекании, так и в процессе испарения (рис. 1).

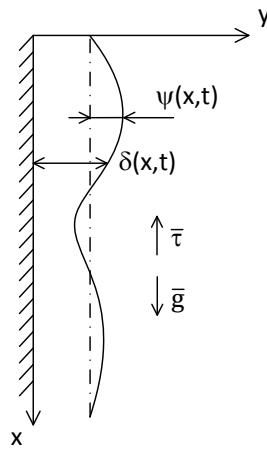


Рис. 1. Жидкая пленка

Примечание: составлено авторами.

Над слоем жидкости движется газовый поток, что приводит к возникновению на границе раздела жидкости и газа касательного напряжения τ . Обозначим $\delta(x, t)$ – толщину пленки и $\psi(x, t)$ – отклонение свободной поверхности пленки от невозмущенного состояния.

Математическая модель состояния свободной поверхности тонкого слоя вязкой жидкости

Состояние свободной поверхности жидкой пленки описывается следующим дифференциальным уравнением в частных производных [7]:

$$C \left(\frac{1}{RePrKu} - \frac{1}{RePrKu} \psi \right) + b_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + b_5 \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_6 \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_7 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + b_9 \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(b_{10} \frac{\partial}{\partial x} - 1 \right) \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

где $b_1 = -ReF_x - \tau Re$, $b_2 = -\frac{1}{2} ReM + \frac{3}{40} Re^3 F_x (\tau + F_x) + \frac{2Re \text{ sign } \Delta T}{3(RePrKu)^2}$, $b_4 = -\frac{1}{3} Re\sigma$,

$b_5 = -2ReF_x - \tau Re$, $b_6 = b_7 = -ReM + \frac{3}{8} Re^3 F_x \tau + \frac{9}{20} Re^3 F_x^2$, $b_9 = -ReM + \frac{3}{2} ReF_x \tau + \frac{9}{4} Re^3 F_x^2$,

$b_{10} = \frac{5}{24} Re^2 F_x$, $M = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y=\delta} \frac{1}{u_0^2 \rho}$ – параметр Марангони, Re – число Рейнольдса,

F_x – число Фруда, Ku – число Кутателадзе, Pr – число Прандтля, T – температура жидкости, σ – поверхностное натяжение жидкости, u_0 – средняя скорость течения жидкой пленки, ρ – плотность жидкости, $\text{sign}\Delta T = 0$ и $C = 0$ соответствуют свободному течению жидкости, а $\text{sign}\Delta T = -1$ и $C = 1$ – испарению.

Вычислительные эксперименты

Рассмотрим линейную часть уравнения (1). Подставив решение вида $\psi = A \exp(ikx - \omega t)$, получим следующее дисперсионное соотношение:

$$-\frac{C}{RePrKu} + \omega(b_{10}k + i) + b_4k^4 - b_2k^2 + b_1ik = 0, \tag{2}$$

где $\omega = \omega_r + i\omega_i$, ω_r – частота, ω_i – инкремент, k – волновое число.

Фазовая скорость определяется по следующей формуле:

$$c_r = \frac{\omega_r}{k}. \tag{3}$$

Вычислительные эксперименты проведены для течения жидкой пленки воды для значений числа Рейнольдса $1 \leq Re \leq 15$ и волновых чисел $0 \leq k \leq 0,5$. Исследованы четыре случая течения:

- 1) свободное течение пленки ($\tau = 0, C = 0, \text{sign}\Delta T = 0$);
- 2) испарение ($\tau = 0, C = 1, \text{sign}\Delta T = -1$);
- 3) противоток ($\tau = -0,1, C = 0, \text{sign}\Delta T = 0$);
- 4) испарение и противоток ($\tau = -0,1, C = 1, \text{sign}\Delta T = -1$).

Для расчета значений волновых характеристик на языке Python реализован следующий алгоритм:

Шаг 1: рассчитать значения коэффициентов b_1, b_2, b_4 и b_{10} .

Шаг 2: для каждого значения $k \in [0; 0,5]$ (значения выбраны с шагом $\Delta k = 0,001$) вычислить значения инкремента ω_i и частоты ω_r .

Шаг 3: используя рассчитанное значение частоты ω_r , определить по формуле (3) значение фазовой скорости c_r .

Течение вертикальной пленки воды неустойчиво при положительных значениях инкремента. Как показано в табл. 1, течение жидкой пленки устойчиво в режиме испарения до $Re = 8$ и при совместном режиме испарения и противотока до $Re = 6$.

Таблица 1

Области неустойчивости

Re	k			
	Свободное течение	Испарение	Противоток	Испарение и противоток
1	[0; 0,028]	–	[0; 0,029]	–
2	[0; 0,049]	–	[0; 0,052]	–
3	[0; 0,068]	–	[0; 0,075]	–
4	[0; 0,087]	–	[0; 0,098]	–
5	[0; 0,104]	–	[0; 0,121]	–
6	[0; 0,121]	–	[0; 0,145]	–
7	[0; 0,138]	–	[0; 0,169]	[0,088; 0,145]
8	[0; 0,154]	–	[0; 0,194]	[0,069; 0,182]
9	[0; 0,17]	[0,082; 0,149]	[0; 0,219]	[0,058; 0,212]
10	[0; 0,185]	[0,07; 0,172]	[0; 0,245]	[0,05; 0,24]
11	[0; 0,201]	[0,062; 0,191]	[0; 0,272]	[0,044; 0,268]

Окончание табл. 1

Re	k			
	Свободное течение	Испарение	Противоток	Испарение и противоток
12	[0; 0,216]	[0,056; 0,209]	[0; 0,299]	[0,04; 0,296]
13	[0; 0,231]	[0,051; 0,225]	[0; 0,327]	[0,036; 0,325]
14	[0; 0,245]	[0,047; 0,241]	[0; 0,355]	[0,032; 0,354]
15	[0; 0,26]	[0,044; 0,256]	[0; 0,384]	[0,03; 0,383]

Примечание: составлено авторами на основании данных, полученных в ходе вычислительного эксперимента.

Результаты расчета значений инкремента и фазовой скорости для неустойчивых режимов течения представлены на рис. 2–3.

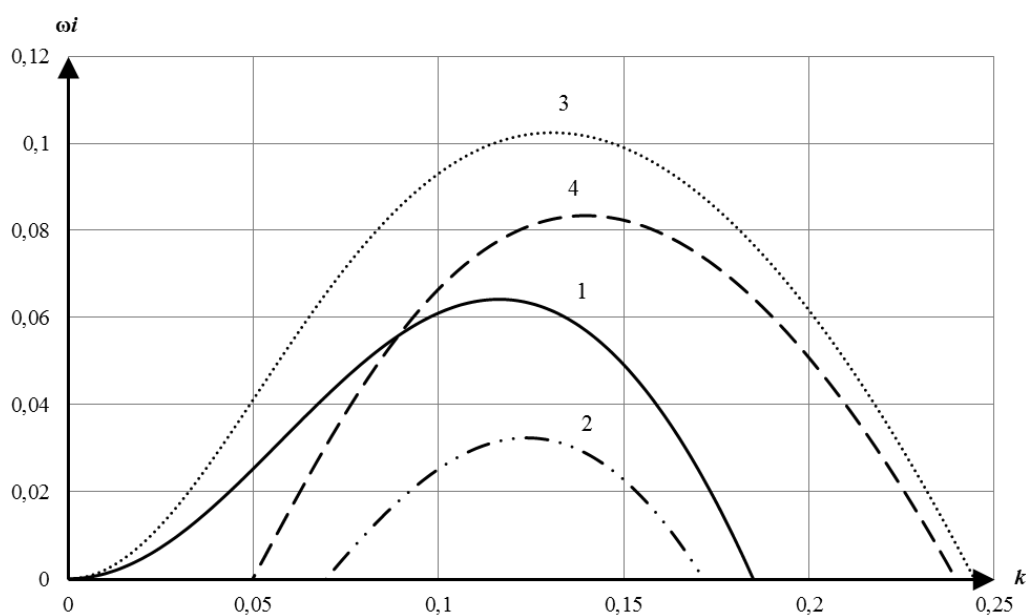


Рис. 2. Инкремент для $Re = 10$:

1 – свободное течение, 2 – испарение, 3 – противоток, 4 – испарение и противоток

Примечание: составлено авторами.

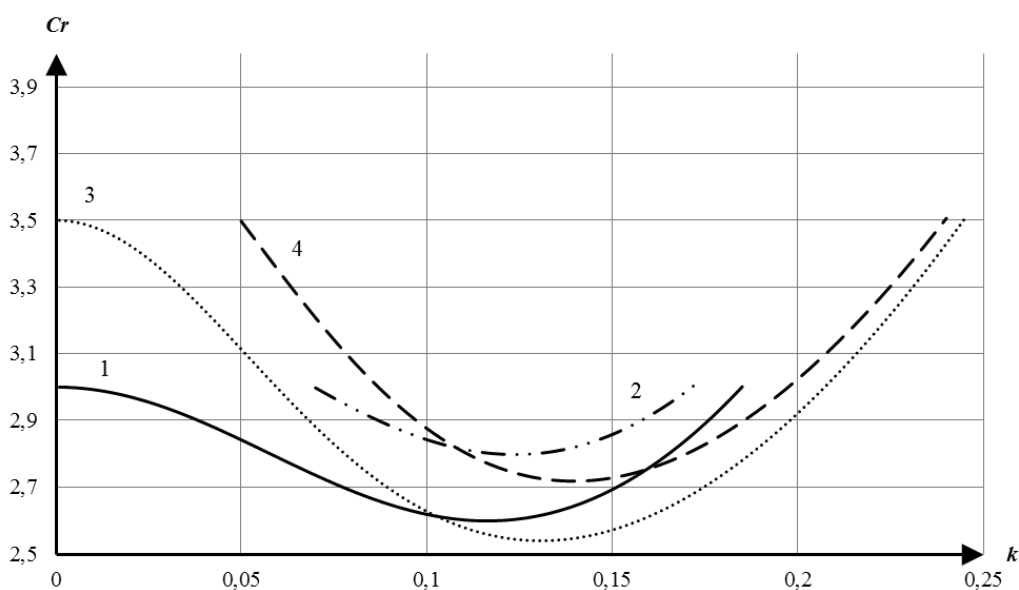


Рис. 3. Фазовая скорость $Re = 10$:

1 – свободное течение, 2 – испарение, 3 – противоток, 4 – испарение и противоток

Примечание: составлено авторами.

В областях неустойчивости жидких пленок величина инкремента достигает максимального значения. В табл. 2 представлены максимальные значения инкремента и соответствующие им значения фазовой скорости для различных значений числа Рейнольдса.

Таблица 2

Инкремент и фазовая скорость

Re	Свободное течение		Испарение		Противоток		Испарение и противоток	
	ω_{imax}	C_r	ω_{imax}	C_r	ω_{imax}	C_r	ω_{imax}	C_r
1	0,000221	2,99986	-0,499626	3,31227	0,000252	3,04983	-0,499576	3,37785
2	0,001401	2,99825	-0,247993	3,30999	0,001807	3,09751	-0,247381	3,44015
3	0,004104	2,99231	-0,160978	3,30183	0,005954	3,13716	-0,158239	3,4912
4	0,008707	2,97823	-0,113097	3,28274	0,014005	3,15799	-0,105322	3,51597
5	0,015355	2,95202	-0,079209	3,24753	0,026724	3,14561	-0,062718	3,49499
6	0,023874	2,91047	-0,051312	3,19242	0,043477	3,08805	-0,02336	3,41388
7	0,033762	2,85229	-0,026613	3,11643	0,061939	2,98417	0,012739	3,27476
8	0,044279	2,7786	-0,00438	3,0219	0,079139	2,84603	0,043327	3,09671
9	0,054639	2,69266	0,015343	2,9137	0,092904	2,69225	0,066875	2,90455
10	0,064188	2,59883	0,032359	2,79776	0,10247	2,53935	0,083412	2,71801
11	0,072502	2,50155	0,0466	2,67962	0,108111	2,39795	0,093984	2,54848
12	0,079387	2,4046	0,058181	2,56364	0,110578	2,27306	0,099953	2,40056
13	0,084838	2,31069	0,067345	2,45282	0,110695	2,16599	0,102582	2,27476
14	0,088954	2,22165	0,074413	2,34889	0,109177	2,07599	0,102893	2,16947
15	0,091903	2,13841	0,079713	2,25269	0,106585	2,00133	0,10165	2,0823

Примечание: составлено авторами на основании данных, полученных в ходе вычислительного эксперимента.

В режимах течения пленки с максимальным инкрементом фазовая скорость имеет минимальное значение.

Рассчитаем состояние волновой поверхности жидкой пленки в режиме свободного стекания. Уравнение свободной поверхности жидкой пленки запишем в виде [8]:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = b_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + b_5 \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} + b_6 \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + b_7 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + b_9 \psi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2. \quad (4)$$

Для моделирования состояния свободной поверхности жидкой пленки реализован следующий алгоритм:

Шаг 1: рассчитать значения коэффициентов $b_1, b_2, b_4, b_5, b_6, b_7$ и b_9 .

Шаг 2: разбить область пространства и времени путем построения конечно-разностной сетки $G = \{(x_i, t_j) : x_i = i\Delta x, t_j = j\Delta t, i = \overline{0, L_x}, j = \overline{0, L_t}\}$.

Шаг 3: интерполировать функцию $\psi(x)$ в момент времени t_j при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа. Рассчитать значения частных производных $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$ и $\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}$ для каждой точки x_i при помощи полученного интерполяционного многочлена.

Шаг 4: рассчитать значения функции в момент времени при помощи формулы (4), выполнив следующую замену: $\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{x=x_i, t=t_j} = \frac{\psi(x_i, t_j + \Delta t) - \psi(x_i, t_j)}{\Delta t}$.

Шаг 5: повторить шаги 3 и 4 для каждого значения $j = \overline{0, L_t}$.

Вычислительные эксперименты проведены для исследования свободной поверхности вертикальной жидкой пленки в случае ее свободного стекания. Используются следующие значения параметров эксперимента: $\psi(x,0) = 0.001 \sin\left(\frac{2\pi x}{80}\right)$, $\Delta x = 5$, $\Delta t = 0.01$, $L_x = 17$, $L_y = 501$.

На рис. 4 представлены результаты моделирования свободной поверхности жидкой пленки при $Re = 10$ в моменты времени $t = 0$, $t = 2$ и $t = 5$.

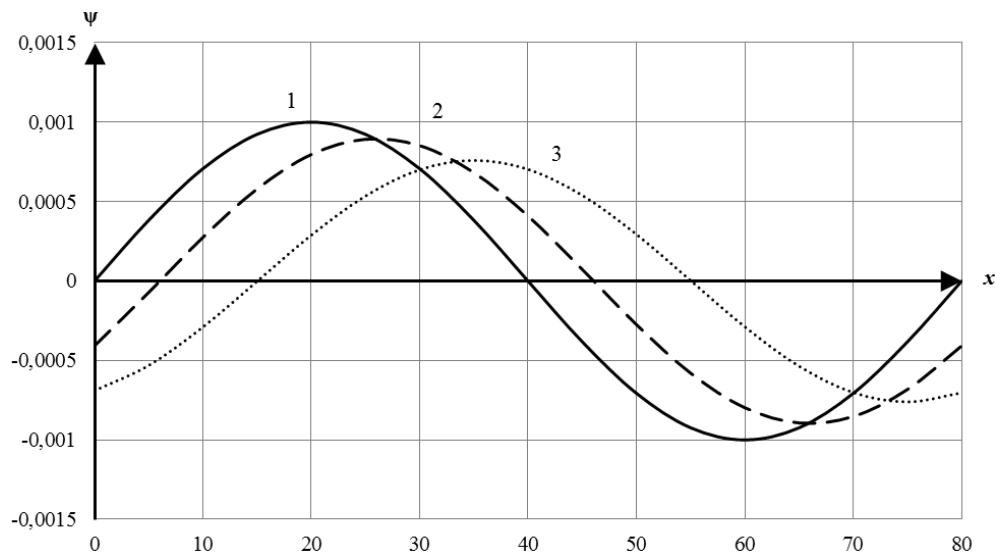


Рис. 4. Отклонение свободной поверхности жидкой пленки $Re = 10$:

1 – $t = 0$, 2 – $t = 2$, 3 – $t = 5$

Примечание: составлено авторами.

Заключение

1. Для режимов свободного стекания пленки, испарения, противотока рассмотрена математическая модель свободной поверхности тонкого слоя вязкой жидкости при $1 \leq Re \leq 15$. Разработаны вычислительные алгоритмы и программы на Python.

2. Рассчитаны области неустойчивости течения тонкого слоя жидкости в режимах свободного стекания, испарения и противотока. Инкремент в области неустойчивости на всем исследуемом диапазоне чисел Рейнольдса достигает максимального значения. Режимам течения с максимальным значением инкремента соответствует минимальное значение фазовой скорости.

3. Представлены результаты численного исследования формирования волн на свободной поверхности пленки. Результаты моделирования могут быть использованы при конструировании или модернизации существующего оборудования, а также при разработке технологических процессов в жидких пленках.

Литература

1. Актершев С. П., Алексеенко С. В. Волновое течение пленки конденсата // Теплофизика высоких температур. 2014. № 1. С. 84–92.
2. Актершев С. П., Алексеенко С. В. Волновое течение испаряющейся пленки жидкости // Известия Томского политехнического университета. 2014. № 4. С. 6–14.
3. Бурмистрова О. А. Устойчивость вертикальной пленки жидкости с учетом эффекта Марангони и теплообмена с окружающей средой // Прикладная механика и техническая физика. 2014. № 3. С. 17–25.

4. Subramaniam V., Garimella S. Numerical Study of Heat and Mass Transfer in Lithium Bromide-Water Falling Films and Droplets // *International Journal of Refrigeration*. 2014. Vol. 40. P. 211–226.

5. Rahimzadeh A., Ahmadian-Yazdi M.-R., Eslamian M. Experimental Study on the Characteristics of Capillary Surface Waves on a Liquid Film on an Ultrasonically Vibrated Substrate // *Fluid Dynamics Research*. 2018. Vol. 50, No. 6.

6. D'Alessio S. J. D., Seth C. J. M. P., Pascal J. P. The Effects of Variable Fluid Properties on Thin Film Stability // *Physics of Fluids*. 2014. Vol. 26, No. 12.

7. Прокудина Л. А. Влияние неоднородности поверхностного натяжения на волновое течение жидкой пленки // *Инженерно-физический журнал*. 2014. № 1. С. 158–166.

8. Прокудина Л. А. Моделирование влияния градиентов температуры на состояние свободной поверхности жидкой пленки // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Сер.: Математическое моделирование и программирование*. 2014. № 2. С. 118–123.