УДК 519.873:004.732

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

А. И. Перегуда, С. В. Ермаков
Обнинский институт атомной энергетики – филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»

Для описания информационных систем используются математические модели, построенные на основе абстрактных логических подсистем с общими для любой информационной системы функциями. Поскольку процессы функционирования логических систем обладают моментами регенерации, то моделью надежности систем является наложение альтернирующих процессов восстановления. При разработке математической модели надежности сети рассмотрены процессы функционирования клиента, порта концентратора и сервера, а затем, основываясь на математической теории процессов восстановления, описаны их функционирование. Получены соотношения для нахождения асимптотических значений таких показателей надежности как вероятность потери данных в локальной вычислительной сети произвольной топологии, среднее время до первой аварии сервера, клиента, концентратора и сети.

Ключевые слова: Вероятность, средняя наработка на отказ, регенерация, клиент, концентратор, сервер, сеть, коэффициент готовности.

METHODS OF INFORMATION SYSTEMS RELIABILITY CALCULATION

A. I. Pereguda, S. V. Ermakov
Obninsk institute for nuclear power engineering, National Research Nuclear University MEPhI

Information systems are described by using mathematical models constructed on the basis of abstract logic subsystems with functions, common to any informational system. Since the processes of logical systems of functioning have moments of regeneration, the model of reliability of systems is the imposition of alternating renewal processes. While developing the mathematical model of network reliability we researched processes of the operation of the client, server and hub port, and then, based on the mathematical theory of recovery processes described their functioning. The papers includes the equations for finding the asymptotic values of reliability indices such as the probability of data loss in the local computer network of arbitrary topology, the average time to the first crash of the server, client and network hub.
Keywords: probability, average mean-time-between-failures, regeneration, client, network hub, server, network, availability factor.

1. Постановка задачи

Без высокоразвитых систем обработки информации в настоящее время практически невозможна эффективная работа организаций, следовательно, требуется обеспечить надежное функционирование этих систем. Поэтому необходимо оценивать показатели надежности этих систем, чтобы добиться оптимального сочетания надежности и стоимости системы. Современные информационные сети построены на основе компьютерных технологий и состоят из программного обеспечения и аппаратного обеспечения. Информационные сети являются распределенными и строятся на основе локальных вычислительных сетей. Поскольку современное программное обеспечение является достаточно сложным, оно также вносит свой вклад в надежность системы. Для описания информационных систем будем использовать математические модели, построенные на основе абстрактных логических подсистем с общими для любой информационной системы функциями. Но для потребителя неважно, что явилось причиной отказа системы, важен сам факт отказа. Существующие модели надежности не позволяют рассматривать аппаратную реализацию и программное обеспечение в совокупности как единое целое, что затрудняет их использование из-за большого разнообразия применяющихся систем, программного обеспечения и сложности их структуры.

Абстрагирование от реального оборудования и рассмотрение логических подсистем позволяет получить методы расчета показателей надежности, которые можно применять к любым локальным вычислительным сетям в независимости от состава оборудования, масштабов системы и ее функций. Под локальной вычислительной сетью будем понимать совокупность аппаратных и программных средств, реализующих следующие основные функции: хранение, обработку, передачу и защиту данных и включающую в себя *сервер* – элемент вычислительной сети, включающий в себя систему хранения данных со своими системой передачи данных и системой безопасности; *клиент* – элемент вычислительной сети, включающий в себя систему обработки данных, систему передачи данных и систему безопасности; *концентратор* – служит для связи клиентов и сервера и состоит из системы передачи данных и системы безопасности. К системе хранения данных относятся аппаратные и программные средства, обеспечивающие функцию хранения данных. Функциями этой системы являются прием, хранение и выдача информации. Функциями системы обработки данных являются преобразование данных и связь системы хранения данных с пользователем. Система безопасности выполняет функции контроля над работой остальных систем и сохранения целостности данных. Она должна либо предотвращать потерю информации, либо сигнализировать о невозможности защиты данных. Аварией локальной вычислительной сети будем считать потерю данных. Под потерей данных понимаем либо реальное их уничтожение, либо невозможность в течение достаточно длительного промежутка времени получить доступ к ним.

Нашей задачей является разработка методов расчета показателей надежности локальной вычислительной сети с восстанавливаемыми элементами, учитывающей последствия отказов подсистем, а также получение соответствующих показателей надежности. Подобные задачи рассматривались ранее в различных работах. Например, в работах [1, 2] были получены выражения для вычисления вероятности потери данных для сетей с невосстанавливаемыми элементами. В работе [3] рассматривалась оценка надежности и эффективности резервированных сетевых структур с выделением двух групп узлов и коммуникационной подсистемы.

2. Основные результаты

Введем необходимые обозначения. Так случайная величина χ будет обозначать наработку до отказа системы обработки данных, а случайная величина γ – время восстановления системы обработки данных. Случайными величинами φ_1, φ_2 и φ_3 обозначим наработки до отказа систем передачи данных клиента, порта концентратора и сервера. Пусть случайные величины ψ_1, ψ_2 и ψ_3 – время восстановления системы передачи данных клиента, порта концентратора и сервера. Случайную наработку до отказа системы хранения данных обозначим через ω, а время её восстановления – через ε. Далее случайные величины ξ_1, ξ_2 и ξ_3 – наработки до скрытого отказа систем безопасности клиента, порта концентратора и сервера. Случайными величинами η_1, η_2 и η_3 будем обозначать время восстановления систем безопасности клиента, порта концентратора и сервера. Так как мы предполагаем, что рассматриваемая система состоит из восстанавливаемых подсистем, то включаем в рассмотрение T_1, T_2 и T_3 – периоды профилактик систем безопасности клиента, порта концентратора и сервера и θ_1, θ_2 и θ_3 – продолжительности профилактик систем безопасности клиента, порта концентратора и сервера. Будем предполагать, что все введенные функции распределения непрерывны, т.е. они обладают плотностями распределения, и кроме того все случайные величины взаимно независимы. При разработке математической модели надежности сети будем раздельно рассматривать процессы функционирования клиента, порта концентратора и сервера, а затем, основываясь на математической теории случайных процессов восстановления, опишем их функционирование.

Математическая модель надежности клиента. Очевидно, что отказ, как системы обработки данных, так и системы передачи данных клиента могут привести к аварии клиента, в случае если их отказы будут не обнаружены, а, следовательно, и не будет выработано соответствующего воздействия. Рассматриваемый элемент вычислительной сети, включающий в себя систему обработки данных, систему передачи данных и систему безопасности принадлежит к, так называемым, системам последовательного типа [4]. Поскольку, все системы составляющие клиента являются восстанавливаемыми системами, то процесс функционирования клиента имеет моменты регенерации. В процессе функционирования клиента возможны два варианта развития событий. Во-первых, система обработки данных может отказать раньше системы передачи данных, тогда:

1) если система безопасности в этот момент исправна, то происходит останов клиента и далее выполняется восстановление система обработки данных, при этом предполагаем, что по окончании восстановления системы и система передачи данных также будет полностью восстановлена;

2) если система безопасности в этот момент неисправна, то произойдет авария клиента.

Во-вторых, система передачи данных может отказать раньше системы обработки данных:

1) если система безопасности в этот момент исправна, то произойдет останов клиента и выполняется восстановление система передачи данных, при этом предполагаем, что по окончании восстановления системы передачи данных и система обработки данных также будет полностью восстановлена;

2) если система безопасности не сработает, то реализуется авария клиента. Также будем предполагать, что производится периодическая процедура контрольных профилактик систем безопасности, которая выполняется не мгновенно, при этом считаем, что во время контрольной профилактики система безопасности не может выполнять свои функции.

Найдем вначале функцию распределения времени до первой аварии клиента. При сделанных выше предположениях i-й цикл регенерации процесса функционирования клиента имеет длительность равную

$$(\chi_i + \gamma_i) J_{\chi_i \le \varphi_{1i}} + (\varphi_{1i} + \psi_{1i}) J_{\varphi_{1i} < \chi_i},$$

где $J_{w\in A} = \begin{cases} 1, & w \in A, \\ 0, & w \notin A. \end{cases}$ – индикатор события $w \in A$.

Таким образом, если система обработки данных отказала раньше системы передачи данных, то цикл регенерации состоит из наработки системы обработки данных до ее отказа и времени восстановления клиента после отказа системы обработки данных, а если система передачи данных отказала раньше системы обработки данных, то цикл регенерации состоит из наработки до ее отказа и времени восстановления клиента после отказа системы передачи данных. Тот цикл регенерации, с номером ν, во время которого произойдет авария клиента, будет, соответственно, иметь укороченную длительность равную $\chi_\nu J_{\chi_\nu \le \varphi_{1\nu}} + \varphi_{1\nu} J_{\varphi_{1\nu} < \chi_\nu}$. Следовательно наработка клиента до аварии ρ будет равна сумме длительностей $\nu - 1$ полных циклов регенерации и длительности того цикла регенерации, на котором произошла авария, т.е.

$$\rho = \sum_{i=1}^{\nu-1} \left((\chi_i + \gamma_i) J_{\chi_i \le \varphi_{1i}} + (\varphi_{1i} + \psi_{1i}) J_{\varphi_{1i} < \chi_i} \right) + \chi_\nu J_{\chi_\nu \le \varphi_{1\nu}} + \varphi_{1\nu} J_{\varphi_{1\nu} < \chi_\nu}.$$

Тогда функцию распределения времени наработки до первой аварии клиента ρ можно записать так:

$$F_\rho(t) = P(\rho \le t) = P\left(\sum_{i=1}^{\nu-1} \left((\chi_i + \gamma_i) J_{\chi_i \le \varphi_{1i}} + (\varphi_{1i} + \psi_{1i}) J_{\varphi_{1i} < \chi_i} \right) + \chi_\nu J_{\chi_\nu \le \varphi_{1\nu}} + \varphi_{1\nu} J_{\varphi_{1\nu} < \chi_\nu} \le t \right).$$

Используя формулу полной вероятности, функцию $F_\rho(t)$ будем вычислять так:

$$F_\rho(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n-1} \left((\chi_i + \gamma_i) J_{\chi_i \le \varphi_{1i}} + (\varphi_{1i} + \psi_{1i}) J_{\varphi_{1i} < \chi_i} \right) + \chi_n J_{\chi_n \le \varphi_{1n}} + \varphi_{1n} J_{\varphi_{1n} < \chi_n} \le t \right) q(1-q)^{n-1} \quad (1)$$

где q – вероятность аварии клиента на цикле регенерации, т.е. вероятность того, что авария произошла именно на n-м цикле, равна $P(\nu = n) = q(1-q)^{n-1}$.

Теперь необходимо вычислить вероятность клиента q, для чего введем в рассмотрение две вспомогательные случайные величины U_n и V_n, учитывающие периодические проверки оборудования. Эти случайные величины определяются следующими соотношениями [4]:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{1i} + \sum_{i=1}^{n-1} \left((T_1 + \theta_1) - \left\{ \frac{\xi_{1i}}{T_1 + \theta_1} \right\} (T_1 + \theta_1) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_{1i} = U_n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \xi_{1i} + \sum_{i=1}^{n} \left((T_1 + \theta_1) - \left\{ \frac{\xi_{1i}}{T + \theta} \right\} (T_1 + \theta_1) \right) + \sum_{i=1}^{n} \eta_{1i} = V_n,$$

здесь U_n – время функционирования системы безопасности клиента до n-го отказа, V_n – время функционирования системы безопасности клиента до n-го восстановления, $[x]$ – целая часть x, $\{x\}$ – дробная часть x, $a \wedge b = aJ_{a \le b} + bJ_{a>b} = \min(a,b)$.

Очевидно, что если отказ системы передачи данных или системы обработки данных произойдет во время проведения восстановления работоспособности системы безопасности, то произойдет авария клиента. Условие аварии для этого случая запишем в виде

$$U_n \le \chi \wedge \varphi_1 < V_n,$$

где χ – наработка до отказа системы обработки данных имеющая функцию распределения $F_\chi(x)$.

Заметим, что авария клиента может произойти также и в тех случаях, когда отказ системы передачи данных или система обработки данных придется на время проведения контрольной профилактики. Условие аварии в таких случаях запишем в виде последовательности событий [4]:

$$\begin{aligned}
&V_{n-1} + T_1 \le \chi \wedge \varphi_1 < V_{n-1} + (T_1 + \theta_1);\\
&V_{n-1} + (T_1 + \theta_1) + T_1 \le \chi \wedge \varphi_1 < V_{n-1} + 2(T_1 + \theta_1);\\
&\dots\\
&V_{n-1} + \left(\left[\tfrac{\xi_{1n}}{T_1+\theta_1}\right] - 1\right)(T_1 + \theta_1) + T_1 \le \chi \wedge \varphi_1 < V_{n-1} + \left[\tfrac{\xi_{1n}}{T_1+\theta_1}\right](T_1 + \theta_1).
\end{aligned}$$

Следовательно, вероятность аварии клиента за период регенерации будем вычислять следующим образом:

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} M\left(J_{U_n \le \chi < V_n} + \sum_{i=1}^{\left[\frac{\xi_{1n}}{T_1+\theta_1}\right]} J_{V_{n-1}+(i-1)(T_1+\theta_1)+T_1 \le \chi < V_{n-1}+i(T_1+\theta_1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} (P(U_n \le x) - P(V_n \le x) +$$
$$+ M\sum_{i=1}^{\left[\frac{\xi_{1n}}{T_1+\theta_1}\right]} (P(V_{n-1} + (i-1)(T_1+\theta_1) + T_1 \le x) - P(V_{n-1} + i(T_1+\theta_1) \le x))dF_{\chi\wedge\varphi_1}(x),$$

здесь $F_{\chi\wedge\varphi_1}(x) = P(\chi \wedge \varphi_1 < x)$ – функция распределения случайной величины $\chi \wedge \varphi_1$.

Очевидно, что записанное выше соотношение позволяет представить вероятность q в виде суммы $q = q' + q''$ и вычислить последовательно каждое из этих слагаемых. Сначала преобразуем q' так:

$$\begin{aligned}
q' &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} (P(U_n \le x) - P(V_n \le x))\, dF_{\chi\wedge\varphi_1}(x) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} \left\{P(\sum_{i=1}^{n}\xi_{1i} + \sum_{i=1}^{n-1}((T_1+\theta_1) - \left\{\frac{\xi_{1i}}{T_1+\theta_1}\right\}(T_1+\theta_1)) + \sum_{i=1}^{n-1}\eta_{1i} \le x)\right\} - \\
&\quad - P\left\{\sum_{i=1}^{n}\xi_{1i} + \sum_{i=1}^{n}\eta_{1i} + \sum_{i=1}^{n}((T_1+\theta_1) - \left\{\frac{\xi_{1i}}{T_1+\theta_1}\right\}(T_1+\theta_1)) \le x)\right\} dF_{\chi\wedge\varphi_1}(x). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Если обозначить через $F_{1i}(x) = P\left\{T_1 + \theta_1 - \left\{\frac{\xi_{1i}}{T_1+\theta_1}\right\}(T_1+\theta_1) \le x\right\}$, то не трудно увидеть, что (2) допускает запись

$$q' = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left\{F_{\xi_1} * (F_{\xi_1} * F_{\eta_1} * F_{1i})^{*(n-1)}(x) - (F_{\xi_1} * F_{\eta_1} * F_{1i})^{*(n)}(x)\right\} dF_{\chi\wedge\varphi_1}(x),$$

где $P(\xi_1 + \xi_2 \le t) = \int_0^t P(\xi_1 \le t - z)dF_2(z) = F_1 * F_2(t)$ – свертка функций распределений $F_1(t)$ и $F_2(t)$, а $F^{*(2)}(x) = F * F(x)$ и т. д.

Замечая, что $H_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_{\xi_1} * (F_{\xi_1} * F_{\eta_1} * F_{1i})^{*(n-1)}(x)$ и $H_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(F_{\xi_1} * F_{\eta_1} * F_{1i})^{*(n)}(x)$ – это функции 0-восстановления и 1-восстановления (т.е. математические ожидания случайного числа

0-восстановлений и 1-восстановлений на интервале $(0,x]$ соответственно) альтернирующего процесса восстановления $\{\xi_{1i},\eta_{1i}\}_{i>1}$. Тогда вероятность q' перепишем так:

$$q' = \int_0^\infty (H_0(x) - H_1(x))dF_{\chi\wedge\varphi_1}(x).$$

Из определения функций восстановления $H_0(t)$ и $H_1(t)$ вытекает следующая связь между ними:

$$H_1(x) = (H_0 * F_{1i} * F_{\eta_1})(x),$$

учитывая которую можно записать q' в виде

$$q' = \int_0^\infty \int_0^x \left\{1 - F_1 * F_{\eta_1}(x-y)\right\} dH_0(y)dF_{\chi\wedge\varphi_1}(x). \tag{3}$$

Используя основную теорему восстановления [5,6], получаем

$$\lim_{x\to\infty}(H_0(x) - H_1(x)) = \frac{M\eta_1 + M(T_1 + \theta_1 + \left[\frac{\xi_1}{T_1+\theta_1}\right](T_1+\theta_1)) - M\xi_1}{M\eta_1 + M(T_1 + \theta_1 + \left[\frac{\xi_1}{T_1+\theta_1}\right](T_1+\theta_1))} = K_1$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое вероятности q

$$q'' = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^\infty M\sum_{i=1}^{\left[\frac{\xi_{1n}}{T_1+\theta_1}\right]}\{P(V_{n-1} + (i-1)(T_1+\theta_1) + T_1 \le x) - P(V_{n-1} + i(T_1+\theta_1) \le x))\}\, dF_{\chi\wedge\varphi_1}(x).$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, а также вводя обозначение $F_{2i}(x) = P(V_{n-1} + i(T_1+\theta_1) \le x)$, видим, что подынтегральное соотношение можно представить в виде $M\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(F_{2i}(x + \theta_1 J_{i\le\left[\frac{\xi_{1n}}{T_1+\theta_1}\right]}) - F_{2i}(x))$. Теперь нетрудно увидеть, что $\sum_{n=1}^{\infty}F_{2i}(x) = H_{0i}(x)$ – функция 0-восстановления, тогда

$$q'' = \int_0^\infty M\sum_{i=1}^{\infty}(H_{0i}(x + \theta_1 J_{i\le\left[\frac{\xi_1}{T_1+\theta_1}\right]}) - H_{0i}(x))\, dF_{\chi\wedge\varphi_1}(x).$$

Если $F_{\chi\wedge\varphi_1}(t)$ не арифметическое распределение, то можно применить теорему Блэкуэлла, в результате чего получаем асимптотическое соотношение для q'' [5,6], которое запишем так:

$$\lim_{x\to\infty} M\sum_{i=1}^{\infty}(H_{0i}(x + \theta_1 J_{i\le\left[\frac{\xi_1}{T_1+\theta_1}\right]}) - H_{0i}(x)) = \frac{M\left[\frac{\xi_1}{T_1+\theta_1}\right]\theta_1}{M\eta_1 + M(T_1 + \theta_1 + \left[\frac{\xi_1}{T_1+\theta_1}\right](T_1+\theta_1))} = K_2.$$

Сложив q' и q'', получим асимптотическое соотношение для вероятности q. Тогда запишем

$$q \approx K_1 + K_2 = 1 - \frac{M\xi_1 - M\left[\frac{\xi_1}{T_1+\theta_1}\right]\theta_1}{M\eta_1 + M(T_1 + \theta_1 + \left[\frac{\xi_1}{T_1+\theta_1}\right](T_1+\theta_1))} = 1 - K_{\text{г}}^{\text{СБ}} = K_{\text{нг}}^{\text{СБ}}, \tag{4}$$

здесь $K_{\text{г}}^{\text{СБ}}$ – стационарный коэффициент готовности системы безопасности, $K_{\text{нг}}^{\text{СБ}}$ – стационарный коэффициент неготовности системы безопасности.

При большом количестве контрольных процедур за время ξ_1 можно использовать приближенное соотношение $M\left[\frac{\xi_1}{T_1+\theta_1}\right] \cong \frac{M\xi_1}{T_1+\theta_1} - {}^1\!/_2$ [4], которое справедливо для всех распределений, используемых в теории надежности, которое позволяет переписать (4) в более простом виде

$$K_{\text{г}}^{\text{СБ}} = \frac{M\xi_1\frac{T_1}{T_i+\theta_1} + \frac{\theta_1}{2}}{M\eta_1 + M\xi_1 + \frac{T_1+\theta_1}{2}}. \tag{5}$$

Используя обозначение операции свертки, перепишем выражение (1) так:

$$F_\rho(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_{\sigma_1}^{*(n-1)} * F_{\sigma_2})(t) K_{\text{нг}}^{\text{СБ}} (1 - K_{\text{нг}}^{\text{СБ}})^{n-1},$$

где $F_{\sigma_1}(t) = P\left((\chi+\gamma) J_{\chi\le\varphi_1} + (\varphi_1+\psi_1) J_{\varphi_1<\chi} \le t\right)$, $F_{\sigma_2}(t) = P\left(\chi J_{\chi\le\varphi_1} + \varphi_1 J_{\varphi_1<\chi} \le t\right)$.

Функции распределения $F_{\sigma_1}(t)$ и $F_{\sigma_2}(t)$ представляем следующим образом:

$$F_{\sigma_1}(t) = \int_0^t \left(\int_0^{t-y} F_\chi(u) dF_{\varphi_1}(u) \right) dF_\gamma(y) + \int_0^t F_\chi(t-y)(1-F_{\varphi_1}(t-y)) dF_\gamma(y) + \int_0^t (1-F_\chi(u)) F_{\psi_1}(t-u) dF_{\varphi_1}(u),$$

$$F_{\sigma_2}(t) = F_\chi(t) + F_{\varphi_1}(t) - F_\chi(t) F_{\varphi_1}(t).$$

Используя преобразование Лапласа-Стилтьеса, функцию $\tilde{F}_\rho(s)$ перепишем так:

$$\tilde{F}_\rho(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{F}_{\sigma_1}(s))^{n-1} \tilde{F}_{\sigma_2}(s) K_{\text{нг}}^{\text{СБ}} (1 - K_{\text{нг}}^{\text{СБ}})^{n-1} = \frac{K_{\text{нг}}^{\text{СБ}} \tilde{F}_{\sigma_2}(s)}{1 - (1 - K_{\text{нг}}^{\text{СБ}}) \tilde{F}_{\sigma_1}(s)}$$

где $\tilde{F}_\rho(s) = Me^{-s\rho}$ – преобразование Лапласа-Стилтьеса функции распределения случайной величины ρ, а, $\tilde{F}_{\sigma_2}(s) = Me^{-s\sigma_2}$, $\tilde{F}_{\sigma_1}(s) = Me^{-s\sigma_1}$ – преобразования Лапласа-Стилтьеса функций распределений случайных величин σ_2 и σ_1 соответственно.

Математическое ожидание наработки до первой аварии клиента ρ получим, воспользовавшись соотношением $M\rho = -\left.\frac{d\tilde{F}_\rho(s)}{ds}\right|_{s=0}$. В результате имеем

$$M\rho = M\sigma_2 + M\sigma_1 \frac{1 - K_{\text{нг}}^{\text{СБ}}}{K_{\text{нг}}^{\text{СБ}}}.$$

Пример 1. Рассмотрим теперь частный случай, когда все случайные величины модели имеют экспоненциальное распределения с параметром λ. Опуская несложные, но громоздкие вычисления, запишем соотношения для функций распределения $F_{\sigma_1}(t)$ и $F_{\sigma_2}(t)$:

$$F_{\sigma_1}(t) = 1 - \frac{\lambda_\chi e^{-\lambda_\gamma t}}{\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1} - \lambda_\gamma} - \frac{\lambda_{\varphi_1} e^{-\lambda_{\psi_1} t}}{\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1} - \lambda_{\psi_1}} + \frac{(\lambda_\chi \lambda_\gamma + \lambda_{\varphi_1}\lambda_{\psi_1} - \lambda_\gamma \lambda_{\psi_1}) e^{-(\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1})t}}{(\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1} - \lambda_\gamma)(\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1} - \lambda_{\psi_1})} =$$
$$= 1 - Ae^{-\lambda_\gamma t} - Be^{-\lambda_{\psi_1} t} + Ce^{-(\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1})t},$$

$$F_{\sigma_2}(t) = 1 - e^{-(\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1})t},$$

а их преобразования Лапласа-Стилтьеса имеют вид

$$\tilde{F}_{\sigma_1}(s) = \frac{A\lambda_\gamma}{\lambda_\gamma + s} + \frac{B\lambda_{\psi_1}}{\lambda_{\psi_1} + s} - \frac{C(\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1})}{\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1} + s}, \qquad \tilde{F}_{\sigma_2}(s) = \frac{\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1}}{s + \lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1}}.$$

Используя соотношение (2), $\tilde{F}_\rho(s)$ представим так:

$$\tilde{F}_\rho(s) = \frac{\tilde{D}(s)}{\tilde{E}(s)},$$

где $\tilde{D}(s) = K_{\text{нг}}^{\text{СБ}} (\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1})(s + \lambda_\gamma)(s + \lambda_{\psi_1})$,

$$\tilde{E}(s) = (s+\lambda_\gamma)(s+\lambda_{\psi_1})(s+\lambda_\chi+\lambda_{\varphi_1}) - (1 - K_{\text{нг}}^{\text{СБ}})(A\lambda_\gamma(s+\lambda_{\psi_1})(s+\lambda_\chi+\lambda_{\varphi_1}) +$$
$$+ B\lambda_{\psi_1}(s+\lambda_\gamma)(s+\lambda_\chi+\lambda_{\varphi_1}) - C(\lambda_\chi+\lambda_{\varphi_1})(s+\lambda_\gamma)(s+\lambda_{\psi_1})).$$

Вычисляя обратное преобразование, получаем

$$F_\rho(t) = 1 + \frac{K_{\text{нг}}^{\text{СБ}}(\lambda_\chi+\lambda_{\varphi_1})(s_1+\lambda_\gamma)(s_1+\lambda_{\psi_1})}{s_1(s_1-s_2)(s_1-s_3)} e^{s_1 t} + \frac{K_{\text{нг}}^{\text{СБ}}(\lambda_\chi+\lambda_{\varphi_1})(s_2+\lambda_\gamma)(s_2+\lambda_{\psi_1})}{s_2(s_2-s_1)(s_2-s_3)} e^{s_2 t} +$$
$$+ \frac{K_{\text{нг}}^{\text{СБ}}(\lambda_\chi+\lambda_{\varphi_1})(s_3+\lambda_\gamma)(s_3+\lambda_{\psi_1})}{s_3(s_3-s_1)(s_3-s_2)} e^{s_3 t},$$

где s_1, s_2 и s_3 – корни уравнения $\tilde{E}(s) = 0$.

Среднее время до первой аварии запишем в виде

$$M\rho = \frac{1}{\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1}} + \left(\frac{A}{\lambda_\gamma} + \frac{B}{\lambda_{\psi_1}} - \frac{C}{\lambda_\chi + \lambda_{\varphi_1}}\right)\frac{1 - K_{\text{нг}}^{\text{СБ}}}{K_{\text{нг}}^{\text{СБ}}}.$$

Вычислим теперь $K_{\text{нг}}^{\text{СБ}}$, для рассматриваемых экспоненциальных распределений. Опуская несложные вычисления, запишем окончательное соотношение для коэффициента неготовности системы безопасности:

$$K_{\text{нг}}^{\text{СБ}} = 1 - \frac{\frac{1}{\lambda_{\xi_1}} - \theta_1 \frac{e^{-\lambda_{\xi_1}(T_1+\theta_1)}}{1-e^{-\lambda_{\xi_1}(T_1+\theta_1)}}}{\frac{1}{\lambda_{\eta_1}} + (T_1+\theta_1) + (T_1+\theta_1)\frac{e^{-\lambda_{\xi_1}(T_1+\theta_1)}}{1-e^{-\lambda_{\xi_1}(T_1+\theta_1)}}}.$$

Математическая модель надежности порта концентратора. Найдем теперь функцию распределения времени до первой аварии порта концентратора. Для этого рассмотрим наложение регенерирующих процессов функционирования системы передачи данных и системы безопасности. Процесс функционирования СПД, в этом контексте, является определяющим, поскольку он задает моменты регенерации процесса функционирования порта, характеризующегося продолжительностью цикла регенерации $\varphi_2 + \psi_2$. Функцию распределения времени до первой аварии порта концентратора запишем так:

$$P\left\{\rho' \le t\right\} = P\left\{\sum_{k=1}^{\pi-1}(\varphi_{2k} + \psi_{2k}) + \varphi_{2\pi} \le t\right\},$$

где π – номер цикла регенерации, на котором произошла авария порта.

Поскольку процесс функционирования порта является альтернирующим процессом восстановления, то вероятность того, что авария произошла на n-ом периоде регенерации можно представить в виде $P\{\pi = n\} = q_2(1-q_2)^{n-1}$, где q_2 – вероятность аварии на цикле регенерации. Используя формулу полной вероятности, запишем

$$P\left\{\rho' \le t\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\sum_{k=1}^{n-1}(\varphi_{2k} + \psi_{2k}) + \varphi_{2n} \le t\right\} P\{\pi = n\}.$$

Подставляя в записанное соотношение вероятность $P\{\pi = n\}$, получаем искомую вероятность в виде

$$F_{\rho'}(t) = q_2 \sum_{n=1}^{\infty} F_{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\varphi_{2k}+\psi_{2k})+\varphi_{2n}}(t)(1-q_2)^{n-1},$$

где $P\left\{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\varphi_{2k} + \psi_{2k}) + \varphi_{2n} \le t\right\} = F_{\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\varphi_{2k}+\psi_{2k})+\varphi_{2n}}(t)$.

Поскольку функцию $F_{\sum_{k=1}^{n-1}(\varphi_{2k}+\psi_{2k})+\varphi_{2n}}(t)$ можно представить в виде сверток функций распределений $F_{\varphi_2}^{*(n)}(t)$ и $F_{\psi_2}^{*(n)}(t)$, то $F_{\rho'}(t)$ перепишем так:

$$F_{\rho'}(t) = q_2 \sum_{n=1}^{\infty}(F_{\varphi_2}^{*(n)} * F_{\psi_2}^{*(n-1)})(t)(1-q_2)^{n-1}. \tag{6}$$

Выполняя преобразование Лапласа-Стилтьеса функции распределения времени до наступления первой аварии порта концентратора записываем (5) в следующем виде:

$$\tilde{F}_{\rho'}(s) = \frac{q_2\tilde{F}_{\varphi_2}(s)}{1-(1-q_2)\tilde{F}_{\varphi_2}(s)\tilde{F}_{\psi_2}(s)}. \tag{7}$$

Поскольку получили преобразование Лапласа-Стилтьеса функции распределения времени до наступления первой аварии порта концентратора, то вычислим математическое ожидание времени до наступления первой аварии порта так:

$$\lim_{s\to 0}\frac{d\tilde{F}_{\rho'}(s)}{ds} = M\rho' = M\varphi_2 + \frac{1-q_2}{q_2}(M\varphi_2 + M\psi_2)$$

Вероятность аварии порта на цикле регенерации q_2 может быть вычислена, так же как и соотношение для вероятности q, которые будут совпадать с точностью до индексов

$$q_2 \approx K_{2\text{нг}}^{\text{СБ}} = 1 - \frac{M\xi_2 - M\left[\frac{\xi_2}{T_2+\theta_2}\right]\theta_2}{M\eta_2 + M\left((T_2+\theta_2) + \left[\frac{\xi_2}{T_2+\theta_2}\right](T_2+\theta_2)\right)}.$$

Используя приближенное соотношение $M\left[\frac{\xi_2}{T_2+\theta_2}\right] \cong \frac{M\xi_2}{T_2+\theta_2} - 1/2$, имеем

$$K_{2\text{нг}}^{\text{СБ}} = \frac{M\eta_2 + \frac{T_2}{2} + M\xi_2\frac{\theta_2}{T_2+\theta_2}}{M\eta_2 + M\xi_2 + \frac{T_2+\theta_2}{2}}.$$

Пример 2. Пусть все случайные величины имеют экспоненциальное распределения с параметром λ, т.е. $F_{\varphi_2}(t) = 1 - e^{-\lambda_{\varphi_2}t}$, $F_{\psi_2}(t) = 1 - e^{-\lambda_{\psi_2}t}$. Вычислим $F_{\rho'}(t)$ используя (5). Очевидно, что

$$\tilde{F}_{\varphi_2}(s) = \frac{\lambda_{\varphi_2}}{s+\lambda_{\varphi_2}}, \qquad \tilde{F}_{\psi_2}(s) = \frac{\lambda_{\psi_2}}{s+\lambda_{\psi_2}}.$$

Следовательно, соотношение (6) может быть переписано так:

$$\tilde{F}_{\rho'}(s) = \frac{K_{2\text{нг}}^{\text{СБ}}\lambda_{\varphi_2}(s+\lambda_{\psi_2})}{s^2 + (\lambda_{\varphi_2}+\lambda_{\psi_2})s + \lambda_{\varphi_2}\lambda_{\psi_2}K_{2\text{нг}}^{\text{СБ}}}.$$

Вычисляя обратное преобразование Лапласа-Стилтьеса, получаем функцию

$$F_{\rho'}(t) = 1 + \frac{K_{2\text{нг}}^{\text{СБ}}\lambda_{\varphi_2}(s_1+\lambda_{\psi_2})}{(s_1-s_2)s_1}e^{s_1 t} - \frac{K_{2\text{нг}}^{\text{СБ}}\lambda_{\varphi_2}(s_2+\lambda_{\psi_2})}{s_2(s_1-s_2)}e^{s_2 t},$$

где $s_{1/2} = \frac{-(\lambda_{\varphi_2}+\lambda_{\psi_2}) \pm \sqrt{(\lambda_{\varphi_2}+\lambda_{\psi_2})^2 - 4\lambda_{\varphi_2}\lambda_{\psi_2}K_{2\text{нг}}^{\text{СБ}}}}{2}$.

Так же как и ранее можно показать, что коэффициент неготовности СБ порта

$$K_{2\text{нг}}^{\text{СБ}} = 1 - \frac{\frac{1}{\lambda_{\xi_2}} - \frac{\theta_2 e^{-\lambda_{\xi_2}(T_2+\theta_2)}}{1-e^{-\lambda_{\xi_2}(T_2+\theta_2)}}}{\frac{1}{\lambda_{\eta_2}} + (T_2+\theta_2) + \frac{(T_2+\theta_2)e^{-\lambda_{\xi_2}(T_2+\theta_2)}}{1-e^{-\lambda_{\xi_2}(T_2+\theta_2)}}}.$$

Соответственно и математическое ожидание времени до наступления первой аварии порта концентратора запишем так

$$M\rho' = \frac{1}{\lambda_{\varphi_2}} + \frac{K_{2\text{г}}^{\text{СБ}}}{1-K_{2\text{г}}^{\text{СБ}}}\left(\frac{1}{\lambda_{\varphi_2}} + \frac{1}{\lambda_{\psi_2}}\right)$$

Математическая модель надежности сервера. Показатели надежности сервера вычисляются по той же схеме, что и показатели надежности клиента и порта концентратора и по этой причине изложение этой модели здесь будет выполнено без подробностей вычисления.

Прежде всего, определяем функцию распределения времени до первой аварии сервера. При данных предположениях i-й цикл регенерации процесса функционирования сервера имеет длительность τ_i равную $(\omega_i + \varepsilon_i)J_{\omega_i \le \varphi_{3i}} + (\varphi_{3i} + \psi_{3i})J_{\varphi_{3i} < \omega_i}$.

Тот цикл регенерации, с номером π, на котором произойдет авария сервера, будет, соответственно, иметь длительность равную $\omega_\pi J_{\omega_\pi \le \varphi_{3\pi}} + \varphi_{3\pi}J_{\varphi_{3\pi} < \omega_\pi} = \omega_\pi \wedge \varphi_{3\pi}$. Наработка сервера до аварии будет, таким образом, складываться из $\pi - 1$ полных циклов регенерации и того цикла регенерации, на котором произошла авария. Тогда функцию распределения времени наработки до первой аварии сервера ρ'' можно записать так:

$$F_{\rho''}(t) = P(\rho'' \le t) = P\left(\sum_{i=1}^{\pi-1}\left((\omega_i+\varepsilon_i)J_{\omega_i\le\varphi_{3i}} + (\varphi_{3i}+\psi_{3i})J_{\varphi_{3i}<\omega_i}\right) + \omega_\pi \wedge \varphi_{3\pi} \le t\right).$$

При вычислении функции распределения времени наработки до первой аварии сервера $F_{\rho}(t)$ используем формулу полной вероятности, а также то, что процесс функционирования сервера имеет моменты регенерации. Тогда функцию $F_{\rho''}(t)$ перепишем так:

$$F_{\rho''}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n-1} \left((\omega_i + \varepsilon_i) J_{\omega_i \le \varphi_{3i}} + (\varphi_{3i} + \psi_{3i}) J_{\varphi_{3i} < \omega_i}\right) + \omega_n \wedge \varphi_{3n} \le t\right) q_3 (1 - q_3)^{n-1}, \qquad (8)$$

где q_3 — вероятность аварии сервера на цикле регенерации.

Не останавливаясь на обсуждении методов получения соотношения для вероятности аварии сервера на цикле регенерации, а сразу запишем конечное соотношение, так как эти методы описаны ранее довольно подробно. Тогда q_3 имеет вид:

$$q_3 \approx K_1 + K_2 = 1 - \frac{M\xi_3 - M\left[\frac{\xi_3}{T_3+\theta_3}\right]\theta_3}{M\eta_3 + M(T_3 + \theta_3 + \left[\frac{\xi_3}{T_3+\theta_3}\right](T_3 + \theta_3))} = 1 - K_{3\text{г}}^{\text{СБ}} = K_{3\text{нг}}^{\text{СБ}},$$

где $K_{3\text{г}}^{\text{СБ}}$ – стационарный коэффициент готовности системы безопасности сервера.

Приближенное соотношение для $K_{3\text{нг}}^{\text{СБ}}$ запишем так

$$K_{3\text{нг}}^{\text{СБ}} = \frac{M\eta_3 + \frac{T_3}{2} + M\xi_3 \frac{\theta_3}{T_3+\theta_3}}{M\eta_3 + M\xi_3 + \frac{T_3+\theta_3}{2}}.$$

Вероятность (8) вычисляется как сумма двух случайных величин, поэтому целесообразно сначала ее записать в виде свертки двух функций

$$F_{\sigma_1'}(t) = P\left((\omega + \varepsilon) J_{\omega \le \varphi_3} + (\varphi_3 + \psi_3) J_{\varphi_3 < \omega} \le t\right), \qquad F_{\sigma_2'}(t) = P\left(\omega \wedge \varphi_3 \le t\right).$$

Тогда

$$F_{\rho''}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (F_{\sigma_1'}^{*(n-1)} * F_{\sigma_2'})(t) K_{3\text{нг}}^{\text{СБ}} (1 - K_{3\text{нг}}^{\text{СБ}})^{n-1}, \qquad (9)$$

здесь σ_1' – длительность цикла регенерации процесса функционирования сервера, при условии, что аварии на этом цикле не произошло, σ_2' – длительность цикла регенерации процесса функционирования сервера, при условии, что аварии на этом цикле произошла.

Для дальнейших вычислений эти функции распределения $F_{\sigma_1'}(t)$ и $F_{\sigma_2'}(t)$ следует преобразовать. Опуская промежуточные преобразования функцию $F_{\sigma_1}(t)$, перепишем следующим образом:

$$F_{\sigma_1'}(t) = \int_0^t \left(\int_0^{t-y} F_\omega(u) dF_{\varphi_3}(u)\right) dF_\varepsilon(y) + \int_0^t F_\omega(t-y)(1 - F_{\varphi_3}(t-y)) dF_\varepsilon(y) + \\ + \int_0^t (1 - F_\omega(u)) F_{\psi_3}(t-u) dF_{\varphi_3}(u),$$

а функцию $F_{\sigma_2}(t)$ запишем так:

$$F_{\sigma_2'}(t) = F_\omega(t) + F_{\varphi_3}(t) - F_\omega(t) F_{\varphi_3}(t).$$

Выполняя преобразование Лапласа-Стилтьеса над соотношением (9), получаем

$$\tilde{F}_{\rho''}(s) = \frac{K_{3\text{нг}}^{\text{СБ}} \tilde{F}_{\sigma_2'}(s)}{1 - K_{3\text{г}}^{\text{СБ}} \tilde{F}_{\sigma_1'}(s)}. \qquad (10)$$

Из соотношения (9) определяем среднее время до первой аварии сервера

$$M\rho'' = M\sigma_2' + M\sigma_1' \frac{K_{3\text{г}}^{\text{СБ}}}{K_{3\text{нг}}^{\text{СБ}}}.$$

Пример 3. Для простоты предположим, что все случайные величины экспоненциально распределены, т.е. $F_{\varphi_3}(t) = 1 - e^{-\lambda_{\varphi 3} t}$, $F_{\psi_3}(t) = 1 - e^{-\lambda_{\psi 3} t}$, $F_{\varepsilon}(t) = 1 - e^{-\lambda_{\varepsilon} t}$, $F_{\omega}(t) = 1 - e^{-\lambda_{\omega} t}$, или $\tilde{F}_{\varphi 3}(s) = \frac{\lambda_{\varphi 3}}{s+\lambda_{\varphi 3}}$, $\tilde{F}_{\psi 3}(s) = \frac{\lambda_{\psi 3}}{s+\lambda_{\psi 3}}$, $\tilde{F}_{\varepsilon}(s) = \frac{\lambda_{\varepsilon}}{s+\lambda_{\varepsilon}}$, $\tilde{F}_{\omega}(s) = \frac{\lambda_{\omega}}{s+\lambda_{\omega}}$.

Опуская несложные, но громоздкие вычисления, запишем соотношения для функций распределения $F_{\sigma'_1}(t)$ и $F_{\sigma'_2}(t)$:

$$F_{\sigma'_1}(t) = 1 - \frac{\lambda_\omega e^{-\lambda_\varepsilon t}}{\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3} - \lambda_\varepsilon} - \frac{\lambda_{\varphi 3} e^{-\lambda_{\psi 3} t}}{\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3} - \lambda_{\psi 3}} + \frac{(\lambda_\omega \lambda_\varepsilon + \lambda_{\varphi 3}\lambda_{\psi 3} - \lambda_\varepsilon \lambda_{\psi 3}) e^{-(\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3})t}}{(\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3} - \lambda_\varepsilon)(\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3} - \lambda_{\psi 3})} =$$
$$= 1 - A' e^{-\lambda_\varepsilon t} - B' e^{-\lambda_{\psi 3} t} + C' e^{-(\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3})t},$$

$$F_{\sigma'_2}(t) = 1 - e^{-(\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3})t},$$

и их преобразования Лапласа-Стилтьеса

$$\tilde{F}_{\sigma'_1}(s) = \frac{A'\lambda_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon + s} + \frac{B'\lambda_{\psi 3}}{\lambda_{\psi 3} + s} - \frac{C'(\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3})}{\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3} + s}, \qquad \tilde{F}_{\sigma'_2}(s) = \frac{\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3}}{s + \lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3}}.$$

Нетрудно получит, что $\tilde{F}_{\rho''}(s)$ можно записать следующим образом

$$\tilde{F}_{\rho''}(s) = \frac{A_1(s)}{B_1(s)},$$

где $A_1(s) = K_{\text{Знг}}^{\text{СБ}}(\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3})(s + \lambda_\varepsilon)(s + \lambda_{\psi 3})$,

$$\begin{array}{l} B_1(s) = (s + \lambda_\varepsilon)(s + \lambda_{\psi 3})(s + \lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3}) - (1 - K_{\text{Знг}}^{\text{СБ}})(A'\lambda_\varepsilon(s + \lambda_{\psi 3})(s + \lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3}) + \\ + B'\lambda_{\psi 3}(s + \lambda_\varepsilon)(s + \lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3}) - C'(\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3})(s + \lambda_\varepsilon)(s + \lambda_{\psi 3})) \end{array}.$$

Находим обратное преобразование Лапласа-Стилтьеса функции $\tilde{F}_{\rho''}(s)$, которое запишем так

$$\begin{array}{l} F_{\rho''}(t) = 1 + \frac{K_{\text{Знг}}^{\text{СБ}}(\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3})(s'_1 + \lambda_\varepsilon)(s'_1 + \lambda_{\psi 3})}{s'_1(s'_1 - s'_2)(s'_1 - s'_3)} e^{s'_1 t} + \\ + \frac{K_{\text{Знг}}^{\text{СБ}}(\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3})(s'_2 + \lambda_\varepsilon)(s'_2 + \lambda_{\psi 3})}{s'_2(s'_2 - s_1)(s'_2 - s'_3)} e^{s'_2 t} + \frac{K_{\text{Знг}}^{\text{СБ}}(\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3})(s'_3 + \lambda_\varepsilon)(s'_3 + \lambda_{\psi 3})}{s'_3(s'_3 - s'_1)(s'_3 - s'_2)} e^{s'_3 t} \end{array},$$

где s'_1, s'_2 и s'_3 — полюса $\tilde{F}_{\rho''}(s)$.
Теперь просто найти математические ожидания $M\sigma'_2$ и $M\sigma'_1$. Запишем их

$$M\sigma'_2 = \frac{1}{\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3}}, \qquad M\sigma'_1 = \frac{A'}{\lambda_\varepsilon} + \frac{B'}{\lambda_{\psi 3}} - \frac{C'}{\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3}}.$$

Среднее время до первой аварии сервера запишем так

$$M\rho'' = \frac{1}{\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3}} + \frac{K_{\text{Зг}}^{\text{СБ}}}{K_{\text{Знг}}^{\text{СБ}}}\left(\frac{A'}{\lambda_\varepsilon} + \frac{B'}{\lambda_{\psi 3}} - \frac{C'}{\lambda_\omega + \lambda_{\varphi 3}}\right)$$

а коэффициент неготовности системы безопасности сервера следующим образом

$$K_{\text{Знг}}^{\text{СБ}} = 1 - \frac{\frac{1}{\lambda_{\xi 3}} - \theta_3 \frac{e^{-\lambda_{\xi 3}(T_3 + \theta_3)}}{1 - e^{-\lambda_{\xi 3}(T_3 + \theta_3)}}}{\frac{1}{\lambda_{\eta 3}} + (T_3 + \theta_3) + \frac{e^{-\lambda_{\xi 3}(T_3 + \theta_3)}}{1 - e^{-\lambda_{\xi 3}(T_3 + \theta_3)}}(T_3 + \theta_3)}.$$

Математическая модель надежности сети. Пусть сеть состоит из конечного числа элементов N. Пусть $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ – структурная функция сети, а $h(P_1, P_2, \ldots P_N) = M\varphi(x) = P(\varphi(x) = 1)$ – функция надежности сети, где $P_i = P(x_i = 1) = Mx_i$ – вероятность безаварийной работы i-го элемента сети. Наработка до аварии ρ_i i-го элемента есть случайная величина. После аварии элемент восстанавливается в течение времени γ_i, также случайного. Предполагаем, что восстановление полное. Таким образом, все время функционирования сети распадается на отдельные циклы, в каждом из которых сеть часть времени работает без аварий (множество интервалов времени Q^+), а остальное время затрачивается на устранение последствий аварии (множество интервалов времени Q^-). Множество интервалов времени, в течение которых i-й элемент работает без аварий, обозначим Q_i^+, а множество остальных интервалов обозначим Q_i^-. $P_i(t)$ – вероятность безаварийного функционирования i-го элемента в момент времени t.

Будем называть дуальной к булевой функции $\varphi_S(\vec{x}) = \varphi_S(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ функцию множеств $A_1, A_2, A_3,\ldots,A_n$ $\widehat{\varphi}_S(A) = \widehat{\varphi}_S(A_1,A_2,\ldots,A_n)$, определенную по следующему правилу: если $\varphi_S(x_1,x_2) = x_1 \wedge x_2$ (последовательное соединение элементов), то $\widehat{\varphi}_S(A_1,A_2) = A_1 \bigcap A_2$, а для функции $\varphi_S(x_1,x_2) = x_1 \vee x_2$ (параллельное соединение элементов), $\widehat{\varphi}_S(A_1,A_2) = A_1 \bigcup A_2$ и, наконец, если $\varphi_S(x) = \bar{x} \Rightarrow \widehat{\varphi}_S(A) = (0,\infty) - A$. Формально дуальную функцию $\widehat{\varphi}_S(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ можно ввести с помощью совершенной дизъюнктивной нормальной формы (СДНФ) булевой функции $\varphi_S(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ так, если СДНФ $\varphi_S(\vec{x}) = \varphi_S(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ имеет вид:

$$\varphi_S(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_{\alpha} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

то

$$\widehat{\varphi}_S(A_1,A_2,\ldots,A_n) = \bigcup_{\alpha} C_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} . A_n^{\alpha_n},$$

где

$$A^{\alpha} = \begin{cases} A, & \text{если } \alpha = 1, \\ (0,\infty) - \infty, & \text{если } \alpha = 0 \end{cases} \text{ и } C_{\alpha_1,\alpha_O,\cdots,\alpha_n} B = \begin{cases} 0, & \text{если } C_{\alpha_1,\alpha_O,\cdots,\alpha_n} = 0 \\ B, & \text{если } C_{\alpha_1,\alpha_O,\cdots,\alpha_n} = 1. \end{cases}$$

Отображение $\pi\varphi \to \widehat{\varphi}$ представляет собой естественный морфизм из категории булевых функций в категорию функций множеств; содержательный смысл состоит в том, что если A_i – множество тех моментов времени, в которые элемент x_i находится в исправном состоянии, то $\widehat{\varphi}_S(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ есть множество моментов исправной работы всей системы.

Если t – некоторый момент времени, то структурная функция $\widehat{\varphi}_S$ $(Q_1^+ \bigcap [0,t], Q_2^+ \bigcap [0,t], Q_3^+ \bigcap [0,t], \ldots, Q_n^+ \bigcap [0,t])$ есть множество моментов времени, в которые система находилась в состоянии безаварийного функционирования до момента t. Тогда среднее время безаварийного функционирования $K_S(t)$ за время t будет определяться формулой

$$K_S(t) = M mes\, \widehat{\varphi}_S\, (Q_1^+ \bigcap [0,t], Q_2^+ \bigcap [0,t], Q_3^+ \bigcap [0,t], \ldots, Q_n^+ \bigcap [0,t]),$$

где $mesA$ — мера множества A.

Меняя порядок вычисления математического ожидания и интегрирования, а также то, что если из условия $y > t$ следует $y \notin Q_i^+ \bigcap [0,t]$, (4) перепишем следующим образом

$$\begin{aligned} K_s(t) &= \int_0^{\infty} P\left\{y \in \widehat{\varphi}_S \left(Q_1^+ \bigcap [0,t], Q_2^+ \bigcap [0,t], Q_3^+ \bigcap [0,t], \ldots, Q_n^+ \bigcap [0,t]\right)\right\} dy = \\ &= \int_0^t h_s\left(P_1(y), P_2(y), \ldots, P_n(y)\right) dy. \end{aligned} \tag{11}$$

Напомним, что по смыслу $P_i(t) = P(\xi_t = 1)$ – вероятность нахождения i-го элемента в безаварийном состоянии в момент времени t. Таким образом, соотношение (11) позволят свести вычисление $K_S(t)$ к расчету вероятностей $P_i(t) = P(\xi_t = 1)$ для отдельных элементов. Теперь необходимо вычислить $P_i(t)$ – вероятность нахождения i-го элемента в состоянии безаварийного функционирования в момент времени t в предположении, что элементы системы восстанавливаемые.

Вероятность нахождения сети в аварийном состоянии P_0, очевидно, запишется в виде

$$\begin{aligned} P_0(t) &= P(t \in Q^-) = 1 - P(t \in Q^+) = 1 - P(t \in \widehat{\varphi}\, (Q_1^+, Q_2^+, \ldots, Q_N^+)) = \\ &= 1 - P(\varphi(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)) = 1) = 1 - h(P_1(t), P_2(t), \ldots, P_N(t)). \end{aligned}$$

Используя формулу полной вероятности, для $P_i(t)$ запишем:

$$P_i(t) = P(t \in Q_i^+) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P(t \in Q_i^+ \,|\rho_{i1} = x,\, \gamma_{i1} = y) dF_{\rho_i}(x) dG_{\gamma_i}(y),$$

где ρ_{i1} и γ_{i1} – случайные времена до первой аварии до первого восстановления соответственно. Процесс функционирования i-го элемента распадается на циклы регенерации длительностью $\rho_i + \gamma_i = \tau_i(\rho_i,\gamma_i)$. Отметим, что возможны два варианта: $\tau_i(\rho_i,\gamma_i) > t$ и $\tau_i(\rho_i,\gamma_i) \leq t$, тогда:
$P_i(t) = \iint_{\tau_i(x,y)\leq t} P(t \in Q_i^+ | \rho_{i1} = x, \gamma_{i1} = y) dF_{\rho_i}(x) dG_{\gamma_i}(y) + \iint_{\tau_i(x,y)>t} P(t \in Q_i^+ | \rho_{i1} = x, \gamma_{i1} = y) dF_{\rho_i}(x) dG_{\gamma_i}(y) = I_1 + I_2$.Вычисляя I_2 и I_1, а затем, складывая их, получаем интегральное уравнение

$$P_i(t) = g_i(t) + \int_0^t P_i(t-z) dF_{\tau_i}(z),$$

где $g_i(t) = \bar{F}_{\rho_i}(t)$, $F_{\tau_i}(t) = P\left(\rho_i + \gamma_i \leq t\right)$.

Решение уравнения будем искать в виде преобразования Лапласа-Стилтьеса. Тогда

$$\tilde{P}_i(s) = \frac{\tilde{g}_i(s)}{1-\tilde{F}_\tau(s)} = \frac{1-Me^{-s\rho_i}}{1-Me^{-s(\rho_i+\gamma_i)}} \quad .$$

Найти обратное преобразование в общем виде невозможно, поэтому найдем асимптотическое соотношение для $P_i(t)$, применяя Тауберову теорему $\lim\limits_{t\to\infty} P_i(t) = \lim\limits_{s\to 0} \tilde{P}_i(s)$, тогда

$$P_i = \lim_{t\to\infty} P_i(t) = \frac{M\rho_i}{M\rho_i + M\gamma_i} = K_{\text{г}i}.$$

Таким образом, предел $P_i(t)$ при $t \to \infty$совпадает с коэффициентом готовности i-го элемента $K_{\text{г}i}$.

Асимптотическое соотношение для вероятности нахождения сети в состоянии аварии P_a тогда запишется в виде $P_a \cong 1 - h(K_{\text{г}1},K_{\text{г}2},\ldots,K_{\text{г}N})$.

Рассмотрим переход типовых подсетей в состояние аварии.

Топология «общая шина». Схема подсети с топологией *общая шина* может выглядеть так, как это представлено на рис.1. Для данной схемы последний клиент в цепочке подключается либо к серверу, либо к другой подсети.

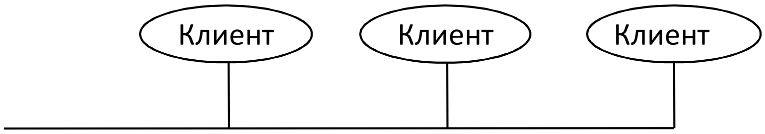

Рис. 1. *Подсеть с топологией общая шина*

Поскольку подсеть переходит в состояние аварии, если в состояние аварии перешел хотя бы один из клиентов. Следовательно, структурная схема сегмента в этом случае это последовательное соединение клиентов, то вероятность аварии подсети будет равна

$$P_0 = 1 - \prod_{i=1}^{N} K_\text{г}^{K_i}.$$

Топология «кольцо». Схема подсети с топологией *кольцо* изображена на рис. 2. Клиент с дополнительным портом подключается либо к серверу, либо к другой подсети.

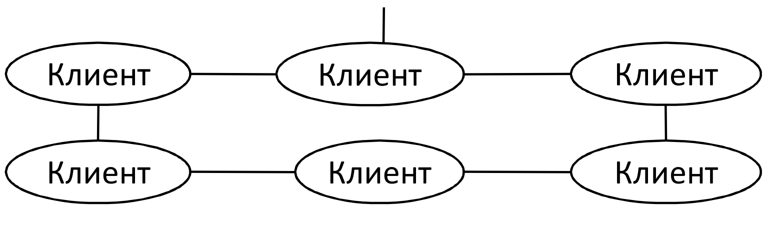

Рис. 2. *Подсеть с топологией кольцо*

При отказе системы обработки данных или системы передачи данных на клиенте, либо отказе системы передачи данных порта, которым подсеть подключена выше, при нормально работающей соответствующей системы безопасности, подсеть переходит в состояние останова, как и при ложном отказе клиента или при отказе порта системы безопасности. При отказе любой из систем и при скрытом отказе отвечающей за ее контроль системы безопасности, сегмент переходит в состояние аварии.

$$P_0 = 1 - K_г^S K_г^P \prod_{i=1}^{N} K_г^{K_i}$$

Топология «звезда». Схему подсети с топологией *звезда* можно представить в следующем виде (рис. 3).

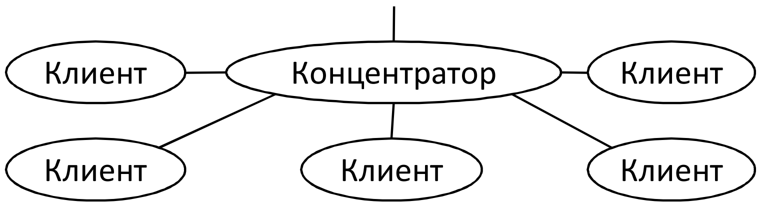

Рис. 3. *Подсеть с топологией звезда.*

Концентратор подключается либо к серверу, либо к другой подсети, если осуществляется каскадное подключение.

В этом сегменте N клиентов и концентратор с N портами, к которым подключаются клиенты, и с одним портом, которым подсеть подключается к другому сегменту или серверу.

Очевидно, что при отказе системы передачи данных порта концентратора, через которые подключается подсеть, при нормально работающей его системы безопасности, то подсеть переходит в состояние останова, как и при ложном отказе системы безопасности этого порта концентратора, а также останове всех клиентов или портов концентратора, к которым подключены клиенты. При отказе любой из систем подсети, при скрытом отказе соответствующей системы безопасности, он переходит в состояние аварии.

Поскольку подсеть переходит в состояние аварии, если произошла потеря данных хотя бы на одном из клиентов или портов концентратора или на сервере, то вероятность аварии будет равна

$$P_0 = 1 - K_г^S \prod_{i=1}^{N+1} K_г^{P_i} \prod_{i=1}^{N} K_г^{K_i},$$

где N — число клиентов в подсети, $K_г^{K_i}$ — коэффициент готовности i–го клиента, $K_г^{P_i}$ — коэффициент готовности i–го порта концентратора, $K_г^S$ — коэффициент готовности сервера.

Заметим, что сети с произвольной топологией являются объединением рассмотренных выше топологий.

3. Заключение

Таким образом, разработана математическая модель надежности локальной вычислительной сети произвольной структуры с восстанавливаемыми элементами. Получены выражения для функции распределения времени наработки до первой аварии и средних времен до первой аварии клиента, порта и сервера при самых общих предположениях о законах распределения случайных величин. Получено асимптотическое соотношение для вероятности нахождения сети в состоянии аварии P_a, также соотношения для вероятности аварии подсетей с топологией общая шина, кольцо и звезда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Перегуда А. И. Надежность и безопасность. Модели, показатели и методы их вычисления: Научная монография. Обнинск : ИАТЭ, 2005. 208 с.

2. Перегуда А. И., Твердохлебов Р. Е. Математическая модель надежности локальной вычислительной сети клиент-серверной архитектуры с произвольной структурой // Информационные технологии. 2007. № 1. С. 7–15.
3. Богатырев В. А. Надежность и эффективность резервированных компьютерных сетей // Информационные технологии. 2006. № 9. С. 25–30.
4. Перегуда А. И., Тимашов Д. А. Моделирование процесса функционирования АТК «ОЗ-СБ» с периодически контролируемой системой безопасности // Надежность. 2007. № 2. С. 38–48.
5. N. Kovalenko I., Kuznetsov N. Yu., Pegg P. A. Mathematical Theory of Reliability of Time Dependent Systems with Practical Applications. Chichester : Wiley, 1997. 316 p.
6. Rausand M., Høyland A. System Reliability Theory: Model, Statistical Methods and Applications. Second edition. Wiley-Interscience, 2004. 316 p.