УДК 517.518.2:528.7

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ РЕЛЬЕФНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А. Г. Назин
Сургутский государственный университет, nag1971@yandex.ru

В статье предложен принципиальный подход к построению рельефной поверхности, основанный на определении множества особых точек поверхности. Приведено дифференциальное уравнение, решением которого является определенное в статье множество особых точек. Поверхность строится с помощью процедуры интерполяции с использованием множества особых точек в качестве узлов интерполяции.

Ключевые слова: поверхность, критическая точка, кривизна, интерполяция.

METHOD OF CONSTRUCTING CONTOURED SURFACES

A. G. Nazin
Surgut State University, nag1971@yandex.ru

In the article the principal approach to the method of constructing contoured surfaces based on the surface singular points plurality definition is offered. A differential equation, the solution of which is the defined in the article plurality of singular points, is given. The surface is constructed by an interpolation procedure using plurality of singular points as interpolation nodes.

Keywords: surface, critical point, curvature, interpolation.

Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую функцию φ на открытом плоском множестве U. Рельефной поверхностью согласно [1] называем график $\mathscr{P} = \{(x, y, \varphi(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$ функции $z = \varphi(x, y)$ в трёхмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных (x, y, z). Поверхность $\mathscr{P}$ будем считать ориентированной выбором поля нормалей $\boldsymbol{n}_P$ к ней, образующих в каждой точке $P \in \mathscr{P}$ острый угол с осью OZ.

Напомним, что в теории функций точка P, лежащая в области определения функции f, называется *критической* для f, если в этой точке градиент $\nabla f(P) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(P), \dfrac{\partial f}{\partial y}(P)\right)$ функции φ обращается в нуль. Точка, не являющаяся критической, называется *регулярной*.

Множество всех критических точек непрерывно дифференцируемой функции f, заданной на открытом множестве V, является замкнутым подмножеством в V, как множество нулей непрерывной на V функции $g = |\nabla f|^2 = \langle \nabla f, \nabla f \rangle$, где ∇f — градиент функции f. Как известно из теории дифференцируемых функций [2, 3], любое замкнутое подмножество открытого множества V может быть множеством критических точек некоторой дифференцируемой функции f, определенной на V. Для произвольно заданной функции f, определенной на открытом подмножестве V плоскости $\mathbb{R}^2$, множество всех точек из V, принимающих заданное значение c, называют *множеством уровня c*. Для его обозначения будем использовать символ $E_c(f)$. Если f не принимает значение c ни в одной точке из V, то множество $E_c(f)$ считаем пустым.

Значение c функции f, определенной на открытом подмножестве V плоскости $\mathbb{R}^2$, называют *регулярным*, если все точки множества $E_c(f)$ (т. е. точки, в которых f принимает значение c) являются регулярными точками функции f. Значение c функции f, не являющееся регулярным, называют *критическим*.

Если P — регулярная для f точка и $f(P) = c$, то, как известно из курса математического анализа, множество $E_c(f)$ представляет собой в некоторой окрестности точки P гладкую кривую, проходящую через точку P. Если же P — критическая точка, то множество $E_c(f)$ в окрестности этой точки может иметь весьма сложное строение. Существует целый раздел математического анализа, изучающий строение таких множеств. В случае, когда c — регулярное значение функции f, множество $E_c(f)$ представляет в окрестности каждой своей точки гладкую кривую, и в этом случае указанное множество $E_c(f)$ можно назвать *изолинией* функции f заданного уровня c. Подчеркнём еще раз, что термин «изолиния» не всегда строго соответствует строению множества $E_c(f)$ (например, это так, если c — регулярное значение для f), в общем случае последнее имеет достаточно сложное строение, по сравнению с изолинией, т. е. множеством, которое представляется, по меньшей мере, непрерывной, кривой в окрестности каждой своей точки.

Если с дифференцируемой функцией φ в пространстве $\mathbb{R}^3$ задано однородное векторное поле силы тяжести, направленное параллельно оси OZ сверху вниз (т. е. в направлении вектора $(0, 0, -1)$), то указанные понятия критической и регулярной точек функции φ, а также множества заданного уровня имеют ясную геоморфометрическую и геодезическую интерпретацию. Регулярность точки P означает, что точка $(P, \varphi(P))$ рельефной поверхности лежит на строго восходящем (или строго нисходящем) скате этой поверхности, а критичность — что точка $(P, \varphi(P))$ является вершинной или донной точкой рельефной поверхности, либо находится в некотором более сложном специфическом рельефном контексте, но в любом случае касательная плоскость к рельефной поверхности в такой точке должна быть параллельна плоскости OXY. Сечения поверхности $\mathscr{P}$ плоскостями, параллельными плоскости OXY, имеют интерпретацию множества точек поверхности $\mathscr{P}$ равных значений высотных отметок, а также эквипотенциальных множеств, т. е. множеств точек указанной поверхности, на которых потенциал гравитационного поля имеет одинаковые значения.

Напомним, что точка P дважды непрерывно дифференцируемой поверхности $\mathscr{P}$ в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ называется омбилической, если кривизны поверхности в этой точке во всех возможных направлениях совпадают [4]. Для омбиличности точки $P \in \mathscr{P}$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке были равны между собой главные кривизны поверхности $\mathscr{P}$ или были пропорциональны векторы (E, F, G) и (L, M, N), составленные из коэффициентов соответственно первой и второй квадратичных форм поверхности $\mathscr{P}$ [4]. Омбилическая точка называется шаровой точкой, если кривизна поверхности в ней в каком-либо (а значит, и в любом) направлении отлична от нуля. Омбилическая точка называется точкой уплощения, если кривизна поверхности в этой точке в каком-либо (а значит, и в любом) направлении равна нулю.

Будем говорить, что точка P интервала $\mathscr{L}$ гладкой регулярной кривой, расположенного в области определения функции $f(P)$, является *$\mathscr{L}$-критической* для f, если производная функции f вдоль $\mathscr{L}$ обращается в нуль в точке P.

Пусть φ — произвольно заданная функция, $\mathscr{P}$ — её рельефная поверхность.

Регулярную для рельефной функции φ точку P назовём *T'-точкой* функции φ, если

T1) *эта точка является $\mathscr{L}$-критической для функции $f(Q) = \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2(Q)$, где $\mathscr{L}$ — часть множества $E_c(\varphi)$ уровня $c = \varphi(P)$ в окрестности точки P, являющаяся гладкой регулярной кривой*;

T2) *либо кривизна кривой $\mathscr{L}$ в точке P равна нулю, либо, если она отлична от нуля, то вектор кривизны этой кривой в точке P антинаправлен вектору градиента функции φ в точке P (т. е. вектору $\nabla\varphi(P)$)*.

Регулярную для φ точку P назовём *W'-точкой* функции φ, если

W1) *эта точка является $\mathscr{L}$-критической для функции $f(Q) = \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2(Q)$, где $\mathscr{L}$ — часть множества $E_c(\varphi)$ уровня $c = \varphi(P)$ в окрестности точки P, являющаяся гладкой регулярной кривой*;

W2) *либо кривизна кривой $\mathscr{L}$ в точке P равна нулю, либо, если она отлична от нуля, то вектор кривизны этой кривой в точке P сонаправлен с вектором градиента функции φ в точке P.*

Критическую для функции φ точку P назовём *критической точкой типа T*, если матрица Гессе этой функции имеет хотя бы одно строго положительное собственное число. Поскольку в критической точке P функции φ касательная плоскость к рельефной поверхности $\mathscr{P}$ параллельна плоскости OXY, то указанная матрица Гесса в точке P пропорциональна с положительным числовым коэффициентом матрице коэффициентов второй квадратичной формы поверхности $\mathscr{P}$ в этой точке (см., например, [4]). Поэтому можно сказать, что *критическая точка P является критической точкой типа T функции φ тогда и только тогда, когда хотя бы одна из главных кривизн поверхности $\mathscr{P}$ в этой точке строго положительна.*

Омбилическую точку P назовём *омбилической точкой типа T*, если для неё выполнено какое-либо из условий :

a) P — регулярная точка функции φ, и в ней кривизна поверхности $\mathscr{P}$ в каком-либо (а значит, и в любом) направлении положительна;

b) P — критическая точка функции φ, и в ней кривизна поверхности $\mathscr{P}$ в каком-либо (а значит, и в любом) направлении строго положительна.

T-множеством функции φ назовём *объединение всех омбилических точек поверхности $\mathscr{P}$ типа T, критических точек типа T и регулярных T'-точек* функции φ.

Критическую точку функции φ назовём *критической точкой типа W* функции φ, если гессиан этой функции в точке P имеет хотя бы одно строго отрицательное собственное число. На основании тех же соображений, что и в случае критической точки типа T, можно утверждать, что *критическая точка функции φ является критической точкой типа W функции φ тогда и только тогда, когда хотя бы одна из главных кривизн поверхности $\mathscr{P}$ в этой точке строго отрицательна.*

Омбилическую точку функции φ назовём *омбилической точкой типа W*, если для нее выполнено какое-либо из условий:

a) P — регулярная точка функции φ, и в ней кривизна поверхности $\mathscr{P}$ в каком-либо (а значит, и в любом) направлении отрицательна;

b) P — критическая точка функции φ, и в ней кривизна поверхности $\mathscr{P}$ в каком-либо (а значит, и в любом) направлении строго отрицательна.

W-множеством функции φ назовём *объединение всех омбилических точек поверхности $\mathscr{P}$ типа W, критических точек типа W и регулярных W'-точек* функции φ.

Отметим, что объединение множеств T и W дает все особые точки поверхности, за исключением точек уплощения. Далее будет указан принципиальный способ вычисления множеств T и W и использование их для построения произвольной рельефной поверхности.

В монографии [1] показано,что объединение множеств T и W состоит из всех критических точек типа T функции φ, всех критических точек типа W функции φ, а также всех регулярных точек функции φ, для которых

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) - \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = 0 \tag{1}$$

Дополним дифференциальное уравнение $\mathfrak{L} = 0$ граничными условиями и решим каким-либо численным методом получившуюся краевую задачу. Решением будет множество точек являющееся объединением множеств T и W. Используя в качестве узлов интерполяции точки множеств T и W с помощью процедуры интерполяции построим рельефную поверхность $\mathscr{P}$ функции φ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кирейтов В. Р., Назин А. Г. Математические основы геоморфометрии. Новосибирск : НГУ, 2010. 392 с.
2. Милнор Дж. Теория Морса. 1963. 184 с.
3. Мальгранж Б. Идеалы дифференцируемых функций. М. : Мир, 1968. 131 с.
4. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М. : Наука, 1974. 176 с.