

УДК 517.956.4

ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ЯВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С АДАПТИВНЫМ СГЛАЖИВАНИЕМ**М. Л. Бахмутский***Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований
Российской академии наук, mbakhmut@mail.ru*

Предложены модификации явных разностных схем интегрирования нелинейных параболических уравнений, значительно ослабляющие ограничение на временной шаг, вытекающее из условий устойчивости. Приведены результаты численных расчетов модельных задач и их сопоставления с аналитическими решениями.

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности, явные схемы, адаптивное сглаживание.

INTEGRATION NONLINEAR PARABOLIC EQUATION BY EXPLICIT FINITE-DIFFERENCE SCHEME WITH ADAPTIVE SMOOTHING**M. L. Bakhmutsky***Scientific research institute of system analysis of the Russian Academy of Sciences, mbakhmut@mail.ru*

Ability relaxation requirements to stable for explicit difference scheme for nonlinear diffusion equation, are shown. Suggest an algorithm with more weak stable condition. The results of numerical computation and matching with analytical results for model problem, are presented.

Введение.

При моделировании пластовых систем приходится решать параболические уравнения для пластового давления, используя громадные пространственные сетки и рассматривать процессы, протекающие длительное время. Эти уравнения, за редким исключением, являются нелинейными. Поэтому задачи моделирования процессов фильтрации в пластах требуют применения параллельных вычислений. Однако абсолютно устойчивые неявные схемы плохо распараллеливаются. Условия устойчивости же для явных схем налагают слишком жесткие ограничения на временной шаг интегрирования. Известно [1], что только первые гладкие собственные элементы разностной аппроксимации аппроксимируют дифференциальный оператор и, поэтому, надо правильно рассчитывать эволюцию во времени нескольких первых низкочастотных компонент и подавлять рост высокочастотных. Ранее автором был предложен алгоритм интегрирования параболических уравнений [2], который заключался в следующем: На каждом шаге при помощи явной схемы находят значения на следующем временном слое. К этим значениям применяется сингулярно-спектральный анализ [3]. Сглаженные значения на следующем временном слое являются результатом шага интегрирования. При таком подходе удается значительно увеличить шаг интегрирования по времени и его ограничивает не столько требование устойчивости, сколько требование точности аппроксимации. Эта идея была продемонстрирована на модельном линейном уравнении [2]. В данной работе приведены примеры численных экспериментов по применению этой идеи для решения некоторых модельных нелинейных уравнений, имеющих аналитическое решение.

1. Сравнение схемы “hopscotch” («классики») и “hopscotch” со сглаживанием.

Существуют абсолютно устойчивые схемы со счетом по явным формулам “hopscotch” («классики») [4,5]. В [4] указывается связь этого метода с методом переменных направлений Писмена – Рэкфорда [6] и доказывается сходимость метода с первым порядком в предположении $\tau/h^2 = const$.

Вернемся к модельной задаче из работы [2] и сравним результаты применения схемы «классики» и этой же схемы с последующим адаптивным сглаживанием на каждом временном слое. Рассмотрим модельную задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \frac{\pi x}{2l_x}, \quad u(0,t) = 0, \quad \frac{du}{dx}(l_x,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$$

Эта задача имеет аналитическое решение:

$$u(x,t) = \left(\frac{2l_x}{\pi}\right)^2 \left[1 - e^{-\left(\frac{\pi}{2l_x}\right)^2 t} \right] \sin\left(\frac{\pi x}{2l_x}\right)$$

Рассмотрим схему:

$$\frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + f_i \quad \text{и} \quad \frac{\tilde{u}_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{\tilde{u}_{i+1}^{n+1} - 2\tilde{u}_i^{n+1} + \tilde{u}_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f_i \quad \text{или}$$

$$\tilde{u}_i^{n+1} = u_i^n + \tau \left[(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)/h^2 + f_i \right] \tag{1}$$

и

$$\tilde{u}_i^{n+1} = \left\{ u_i^n + \tau (\tilde{u}_{i+1}^{n+1} + \tilde{u}_{i-1}^{n+1})/h^2 + \tau f_i \right\} / (1 + 2\tau/h^2) \tag{2}$$

Для всех нечетных временных шагов сначала, для четных узлов (четные i), применяется формула (1), а затем, для нечетных i применяется формула (2). Для всех четных временных шагов, порядок применения формул (1) и (2) меняется т.е., сначала для нечетных узлов (нечетные i), применяется формула (1), а затем для четных (четные i) формула (2).

Если адаптивное сглаживание не производится, полагаем $u_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1}$. Если на временном шаге производится адаптивное сглаживание, то на $n + 1$ -м временном слое строится траекторная матрица $A = \{a_{i,j}\}$ размерностью $m * n$. Здесь $m = \left\lfloor \frac{N_x+1}{2} \right\rfloor$, $n = N_x + 1 - m$. Элементы матрицы определяются как $a_{i,j} = \tilde{u}_{i+j-1}^{n+1}$. Находится сингулярное разложение матрицы A , затем матрица приближается отбрасыванием сингулярных троек, сингулярные числа которых меньше некоторого граничного значения. Элементы аппроксимирующей матрицы имеют вид: $\tilde{a}_{i,j} = \sum_{\sigma_p \geq \sigma_0} \sigma_p u_p(i) v_p(j)$, где $\sigma_0 = \sigma_{\max} \epsilon$. После этого получаем решение на следующем временном слое

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \tilde{a}_{i,j-i+1}, & 1 \leq j \leq m \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \tilde{a}_{i,j-i+1}, & m \leq j \leq n \\ \frac{1}{N_x - j + 1} \sum_{i=1}^{N_x-j+1} \tilde{a}_{i+j-n,n-i+1}, & n \leq j \leq N_x \end{cases} \tag{3}$$

Приведем пример расчета этой задачи по схеме «классики» без сглаживания и со сглаживанием.

На рис.1 приведен пример расчета вышеописанной задачи по схеме «классики» без (точки) и со сглаживанием. Шаг по времени равен пространственному шагу. Время равно 2, пространственный шаг равен 0.002. Результаты численного счета сравнивались с аналитическим решением и вычислялась относительная ошибка в %.

Шаг интегрирования по времени в 1000 раз превышает максимально допустимый по условию устойчивости явной схемы. Относительная ошибка схемы с сглаживанием (на графике пунктирная линия), по крайней мере на два порядка, меньше схемы без сглаживания (точки). При сглаживании по формуле (3) использовались 2 сингулярные тройки.

2. В качестве модельного нелинейного уравнения рассмотрим следующую задачу (уравнение Фишера) [7]:

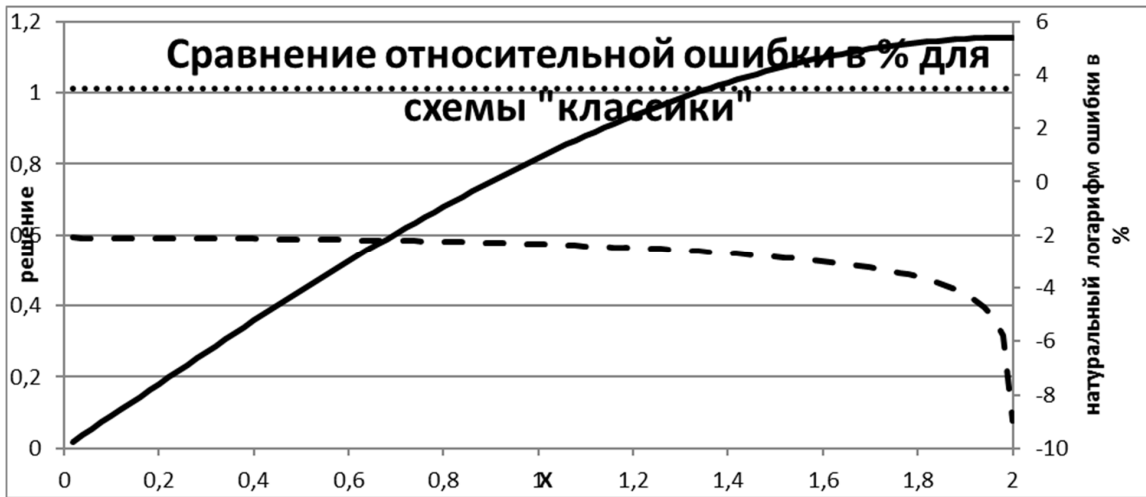


Рис. 1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u), \quad x \in [0 \div 2], \quad t \in [0 \div 2], \quad u(0,t) = \left[1 + \exp\left(-\frac{5}{6}t\right)\right]^{-2}, \\ u(2,t) &= \left[1 + \exp\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \exp\left(-\frac{5}{6}t\right)\right]^{-2}, \\ u(x,0) &= \left[1 + \exp\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right)\right]^{-2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта задача имеет аналитическое решение

$$u(x,t) = \left[1 + \exp\left(-\frac{5}{6}t + \frac{x}{\sqrt{6}}\right)\right]^{-2}.$$

Будем использовать классическую явную схему с равномерным шагом по пространству

$$\frac{\bar{u}_i - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + u_i^n(1 - u_i^n). \quad (5)$$

Здесь \bar{u}_i — промежуточное значение функции на $n + 1$ -м временном слое. После нахождения промежуточных значений строим траекторную матрицу, находим ее сингулярное разложение, отбрасываем лишние сингулярные тройки и восстанавливаем сглаженное значение функции на $n + 1$ -м временном слое по формуле (3). Рассмотрим числовой пример. Пусть шаг по пространству равен 0.002. Проведем расчеты с временными шагами равными $0.1h$ и $0.2h$. Таким образом, мы выбираем шаг интегрирования, который в 100 и 200 раз больше допустимого по условию устойчивости для явной разностной схемы. На рис.2 приведен график разностного решения для момента времени $t = 2$ и графики относительной ошибки в % для шагов $0.1h$ (точки) и $0.2h$ (пунктир).

На рис.3 приведены десятичные логарифмы 20 максимальных сингулярных чисел для первого (треугольники) и последнего временного слоя задачи (4), (5), (3). Из графика видно, что для сглаживания по (3) использовались 2 сингулярные тройки.

Р. П. Федоренко, в [8] обсуждая достоинства и недостатки применения явной и неявной схемы интегрирования уравнения теплопроводности, указывает, что требования точности счета приводят к необходимости использовать при применении неявной схемы такой же временной шаг как и при использовании явной, т.е. $\tau < \frac{h^2}{2}$. По нашему мнению (см. [2]), точность счета требует $\tau \approx 0.1h$. Более значимым недостатком явных схем, при интегрировании нелинейных уравнений теплопроводности для задач с движущимся фронтом тепловой волны, по Р. П. Федоренко является то, что явная схема

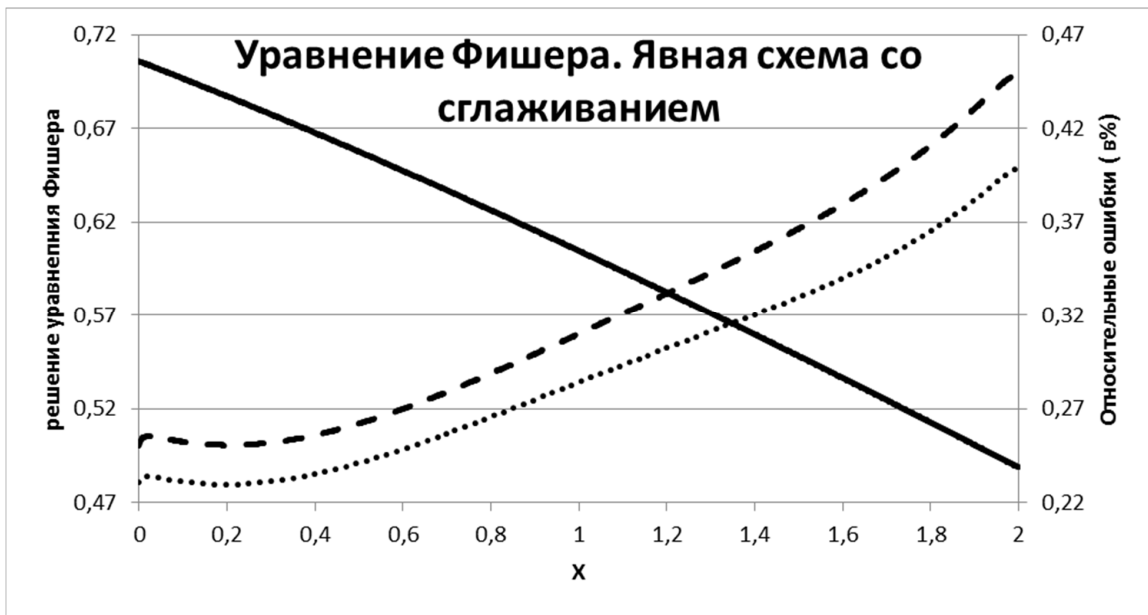


Рис. 2.



Рис. 3.

«не пропускает поток тепла». Поскольку схема «классики» несет в себе черты как явной, так и неявной схемы, применим ее для интегрирования уравнения Фишера. Для нахождения решения на каждом временном шаге будем использовать, поочередно, явную и неявную аппроксимации уравнений (4)

$$\frac{\bar{u}_i - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + u_i^n - (u_i^n)^2,$$

$$\frac{\bar{u}_i - u_i^n}{\tau} = \frac{\bar{u}_{i+1} - 2\bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{h^2} + \bar{u}_i - (\bar{u}_i)^2.$$

Или

$$\frac{\bar{u}_i - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + u_i^n - (u_i^n)^2, \quad \bar{u}_i = \frac{2a_i}{b + \sqrt{b^2 + 4\tau a_i}}. \quad (6)$$

Здесь

$$a_i \equiv \left(u_i^n + \tau(\bar{u}_{i+1} + \bar{u}_{i-1})/h^2 \right), \quad b \equiv 1 - \tau + 2\tau/h^2. \quad (7)$$

Для каждого шага по времени, значения на следующем временном слое находим из (6), (7). Для нечетных временных шагов сначала по явной формуле (6) для четных узлов i , а затем по (7) для нечетных. После этого строим траекторную матрицу, находим ее сингулярное разложение и получаем решение на следующем слое по формуле (3). Для четных временных шагов по формуле (6) находим значения для нечетных узлов i , а затем по формуле (7) для четных. После этого опять формируем траекторную матрицу, находим ее сингулярное разложение и получаем решение на следующем слое по формуле (3).

На рис.4 и рис.5 построены графики решения и относительной ошибки в % уравнения Фишера (4) для момента $t = 2$. Решение найдено по схеме (6), (7) и (3). Пространственный шаг $h = 0.002$, временной шаг на рис.4 равен $0.1h$, т.е. в 100 раз больше чем допускается устойчивостью явной схемы. При сглаживании по формуле (3) использовались две сингулярные тройки. Временной шаг на рис. 5 равен h , т.е. в 1000 раз больше максимально возможного шага явной схемы. При сглаживании по формуле (3) использовалась одна сингулярная тройка.

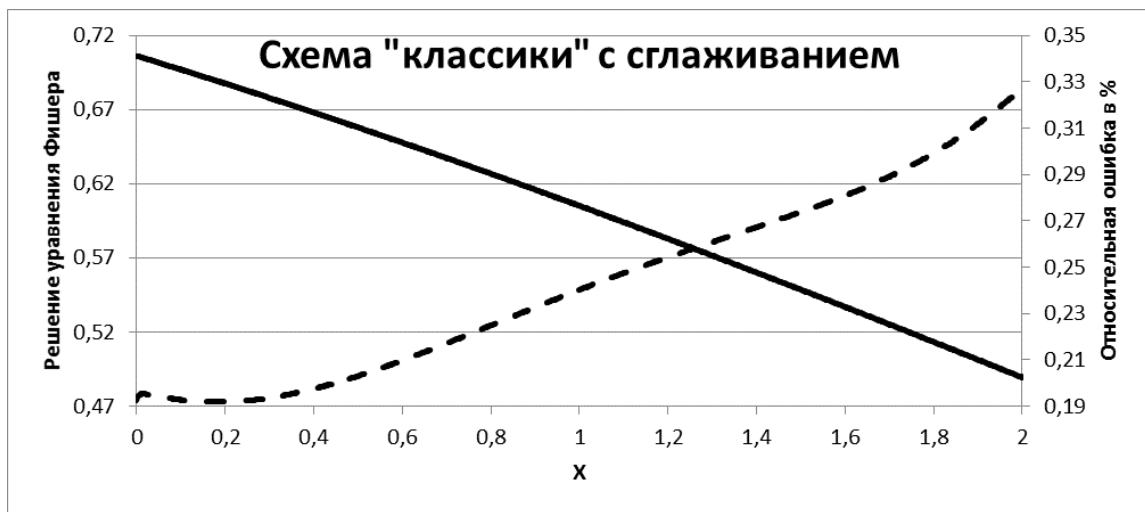


Рис. 4.

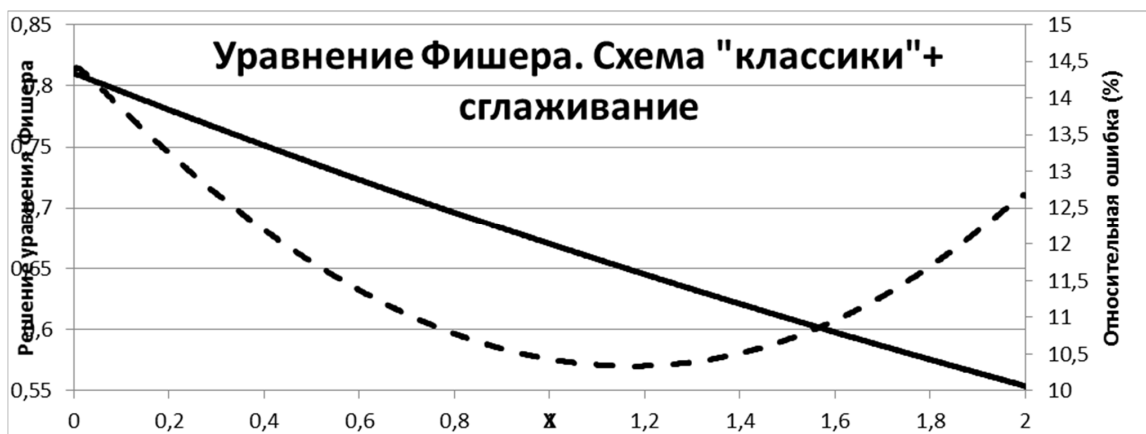


Рис. 5.

3. Уравнение Фишера имело нелинейность в источнике. Рассмотрим теперь пример уравнения, коэффициент теплопроводности у которого зависит от решения [7]. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1+u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad x \in [0 \div 2], \quad t \in [0 \div 2], \quad u(0,t) = 0, \quad (8)$$

$$u(2,t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3-t}}, \quad u(x,0) = \frac{x}{\sqrt{10-x^2}}.$$

Эта задача имеет аналитическое решение:

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{10 - 2t - x^2}}$$

Будем, условно, называть это уравнение уравнением 2. Для решения задачи (8), используем сначала явную схему и адаптивное сглаживание по формуле (3). Дивергентная разностная схема с постоянным шагом по пространству для уравнения (8) имеет вид:

$$\bar{u}_i = u_i^n + a_i (u_{i+1}^n - u_i^n) - a_{i-1} (u_i^n - u_{i-1}^n), \quad \text{где} \quad a_i \equiv \tau \frac{2 + (u_{i+1}^n)^2 + (u_i^n)^2}{2h^2 (1 + (u_{i+1}^n)^2) (1 + (u_i^n)^2)} \quad (9)$$

Рассмотрим числовой пример. Возьмем шаг по пространству равный 0.002, а шаг по времени равный $0.1h$, т.е. в 100 раз больше допустимого по условию устойчивости. Условие устойчивости явной схемы для нашего случая дается формулой:

$$\tau \leq \frac{1}{2} \min \frac{2h^2 (1 + (u_i^n)^2) (1 + (u_{i+1}^n)^2)}{2 + (u_i^n)^2 + (u_{i+1}^n)^2}$$

Иными словами, можно ввести эффективный пространственный шаг

$$h_{eff} = h \cdot \min \sqrt{\frac{2 (1 + (u_i^n)^2) (1 + (u_{i+1}^n)^2)}{2 + (u_i^n)^2 + (u_{i+1}^n)^2}}$$

Таким образом, слова $\tau = 0.1 h$, означают $\tau = 0.1 h_{eff}$.

На рис.6 приведены графики - численного решения для момента $t = 2$ (сплошная линия) и относительной ошибки (в %) в сравнении с аналитическим решением (пунктир). Изобразить на одном графике численное и аналитическое решение не представляется возможным, т.к. графики практически сливаются.

При сглаживании по формуле (3) использовались две сингулярные тройки.

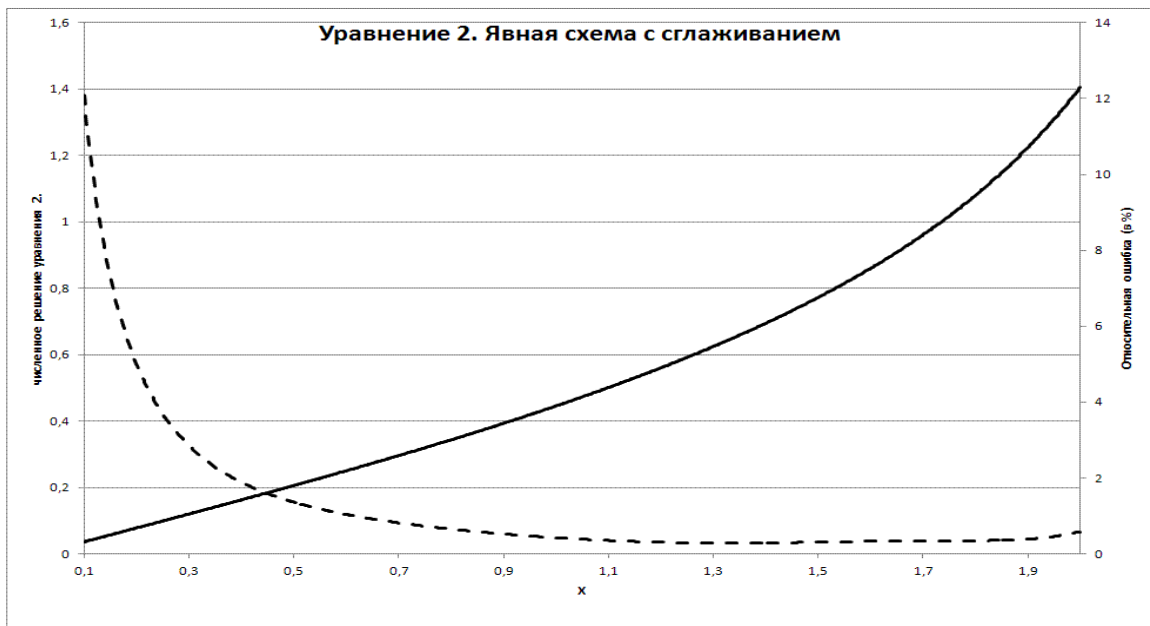


Рис. 6.

Таким образом, ясно что возможно корректное интегрирование нелинейных уравнений теплопроводности, используя явную схему с адаптивным сглаживанием. При этом шаг интегрирования по времени может в сотни раз превышать шаг, диктуемый условиями устойчивости.

Рассмотрим теперь применение схем типа «классики» для параболических уравнений, коэффициенты дифференциального оператора, которых зависят от решения. Рассмотрим некоторые варианты применения схемы типа «классики» к уравнению 2. Рассмотрим три алгоритма, которые будем называть «классики»1, «классики»2 и «классики»3.

В алгоритме «классики»1 при вычислении значений коэффициентов берутся значения решения с предыдущего временного шага. Для каждого нечетного временного шага промежуточное решение на следующем шаге находится по явной схеме для четных пространственных узлов

$$\tilde{u}_i = u_i^n + a_i (u_{i+1}^n - u_i^n) - a_{i-1} (u_i^n - u_{i-1}^n), \quad a_i \equiv \tau \frac{2 + (u_i^n)^2 + (u_{i+1}^n)^2}{2h^2 (1 + (u_i^n)^2) (1 + (u_{i+1}^n)^2)} \quad (10)$$

И по неявной схеме, для нечетных

$$\tilde{u}_i = u_i^n + a_i (\tilde{u}_{i+1} - \tilde{u}_i) - a_{i-1} (\tilde{u}_i - \tilde{u}_{i-1}), \quad \tilde{u}_i = u_i^n / b_i + (a_i \tilde{u}_{i+1} + a_{i-1} \tilde{u}_{i-1}) / b_i b_i = 1 + a_i + a_{i-1} \quad (11)$$

После этого, по полученным значениям строится траекторная матрица, находится ее сингулярное разложение и, по формуле (3), решение восстанавливается. Для четных временных шагов формулы (10) применяются для нечетных пространственных узлов, а формулы (11) для четных пространственных узлов.

В алгоритме «классики»2, сначала по явной разностной схеме находятся значения на следующем временном слое.

$$\hat{u}_i = u_i^n + a_i^n (u_{i+1}^n - u_i^n) - a_{i-1}^n (u_i^n - u_{i-1}^n), \quad a_i^n = \tau \frac{2 + (u_i^n)^2 + (u_{i+1}^n)^2}{2h^2 (1 + (u_i^n)^2) (1 + (u_{i+1}^n)^2)} \quad (12)$$

Затем эти значения сглаживаются путем построения траекторной матрицы, ее сингулярного разложения и применения формулы (3). После этого, применяется неявное уточнение:

$$\tilde{u}_i = u_i^n / b_i + (a_i^{n+1} \hat{u}_{i+1} + a_{i-1}^{n+1} \hat{u}_{i-1}) / b_i, \quad a_i^{n+1} \equiv \tau \frac{2 + \hat{u}_i^2 + \hat{u}_{i+1}^2}{2h^2 (1 + \hat{u}_i^2) (1 + \hat{u}_{i+1}^2)} \quad (13)$$

В случае нечетных временных шагов, формулы (13) применяются для нечетных пространственных узлов, а в случае четных для четных. Т.е., в случае нечетных временных шагов, для четных узлов $-u_i^{n+1} = \hat{u}_i$ а для нечетных $-u_i^{n+1} = \tilde{u}_i$. Для четных временных шагов $-u_i^{n+1} = \hat{u}_i$ для нечетных пространственных узлов, и $u_i^{n+1} = \tilde{u}_i$ для четных.

В алгоритме «классики»3 также по явной разностной схеме находятся значения на следующем временном слое, они сглаживаются по формуле (3), а затем поочередно применяется неявное уточнение при помощи метода Ньютона.

$$\tilde{u}_i = u_i^n + a_i (u_{i+1}^n - u_i^n) - a_{i-1} (u_i^n - u_{i-1}^n), \quad a_i \equiv \tau \frac{2 + (u_i^n)^2 + (u_{i+1}^n)^2}{2h^2 (1 + (u_i^n)^2) (1 + (u_{i+1}^n)^2)},$$

$$x^{(0)} = \tilde{u}_i, \quad F(x) = x b_i - u_i^n - \bar{a}_i \tilde{u}_{i+1} - \bar{a}_{i-1} \tilde{u}_{i-1}, \quad \bar{a}_i \equiv \tau \frac{2 + x^2 + (\tilde{u}_{i+1})^2}{2h^2 (1 + x^2) (1 + (\tilde{u}_{i+1})^2)}, \quad (14)$$

$$b_i = 1 + \bar{a}_i + \bar{a}_{i-1}, \quad F'(x) = b_i + x b_i' - \bar{a}_i' \tilde{u}_{i+1} - \bar{a}_{i-1}' \tilde{u}_{i-1}, \quad F(x^*) = 0,$$

$$x^{(s+1)} = x^{(s)} - \frac{F(x^{(s)})}{F'(x^{(s)})}, \quad u_i^{n+1} = x^*. \quad (15)$$

Сначала, по формулам (14) находятся значения на следующем временном слое, затем эти значения сглаживаются, как это описано выше. После этого для каждого нечетного пространственного узла в случае нечетного временного шага и каждого четного пространственного узла в случае четного временного шага применяются формулы (15). В качестве решения на следующем временном слое

берутся, поочередно, значения, полученные по явной схеме с сглаживанием и результаты расчета методом Ньютона. Эти алгоритмы позволяют преодолеть недостатки явной схемы, отмеченные в [8], и вести счет по явным формулам, не прибегая к решению СЛАУ. На рис.7 приведены результат решения уравнения 2 (сплошная линия) для момента $t = 2$, полученный при помощи алгоритма «классики»1 и относительная ошибка (в %) численного решения по сравнению с аналитическим(пунктир).

Пространственный шаг 0.002. Временной шаг равен $0.1h$. Для сглаживания использовались 4 сингулярные тройки.

На рис.8 приведены результаты решения уравнения 2 (также сплошная линия) и относительная ошибка (пунктир) для того же набора параметров, но только при использовании алгоритма «классики»2. Для сглаживания использовались 3 сингулярные тройки.

На рис.9 приведены результаты такого же расчета по алгоритму «классики»2, но временной шаг равен пространственному. Сглаживание производилось двумя сингулярными тройками. Легко видеть, что несмотря на то что шаг по времени в 100 или 1000 раз превышает максимально допустимый условием устойчивости явной схемы, счет является устойчивым, хотя на точность счета величина шага по времени конечно влияет.

На рис.10 приведены результат решения уравнения 2 (сплошная линия) для момента $t = 2$, полученный при помощи алгоритма «классики»3 и относительная ошибка (в %) численного решения по сравнению с аналитическим (пунктир).

Пространственный шаг 0.002. Временной шаг равен $0.1h$. Для сглаживания использовались 3 сингулярные тройки.

На рис.11 приведены результаты такого же расчета по алгоритму «классики»3, но временной шаг равен пространственному. Сглаживание производилось двумя сингулярными тройками.

На рис.12 приведены результаты сравнения решения уравнения 2, полученного по алгоритму «классики»3 с шагом по времени, равном шагу по пространству (пунктир) с аналитическим решением (сплошная линия). Для сглаживания применялись две сингулярные тройки.



Рис. 7.

Заключение.

Можно утверждать, что ценой некоторых дополнительных вычислений удастся значительно ослабить жесткие условия устойчивости явных схем не только для линейных, но и для нелинейных уравнений. Это позволит более широко использовать явные схемы для расчетов на суперкомпьютерах с большим числом процессоров.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований Президиума РАН по стратегическим направлениям развития науки II.4П «Фундаментальные проблемы математического моделирования»

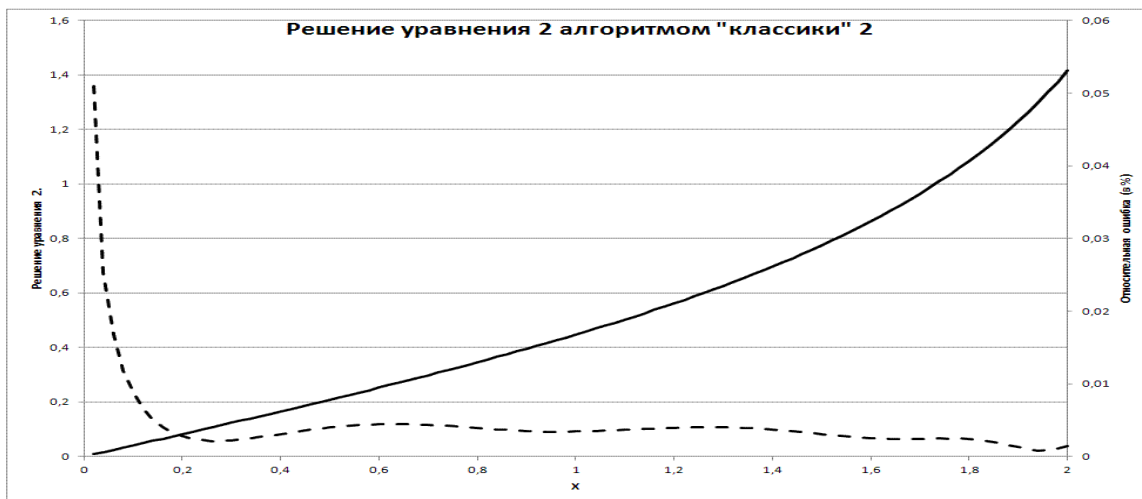


Рис. 8.



Рис. 9.

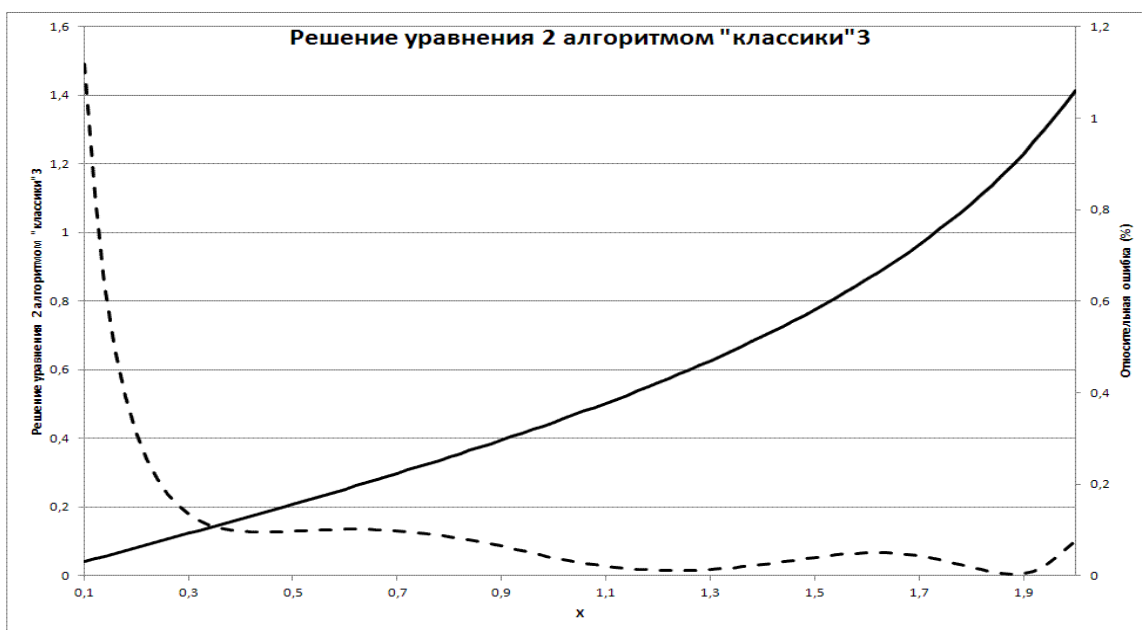


Рис. 10.

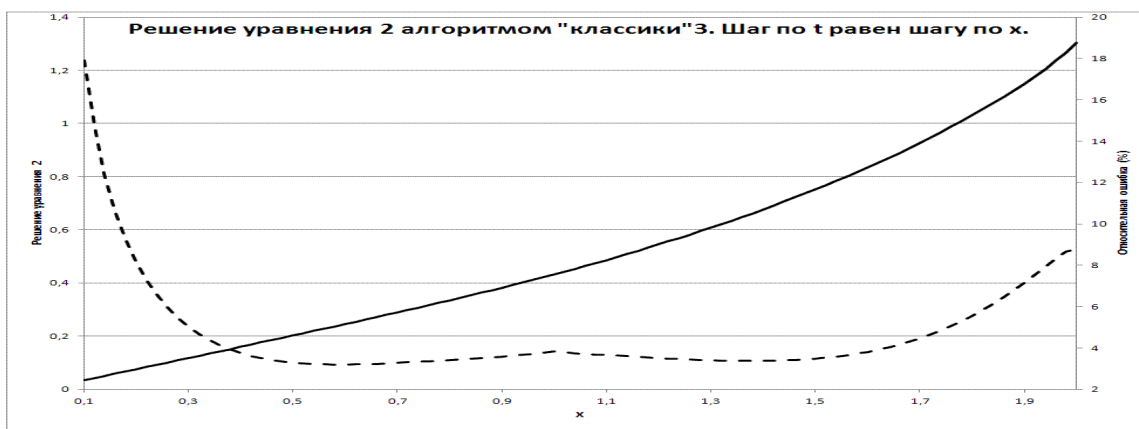


Рис. 11.



Рис. 12.

ЛИТЕРАТУРА

1. Люстерник Л. А. О разностных аппроксимациях оператора Лапласа // Успехи матем. наук. 1954. Т. IX, № 2. С. 3–55.
2. Бахмутский М. Л. Об использовании явных разностных схем интегрирования параболических уравнений // Труды НИИСИ РАН. 2015. Т. 5, № 1.
3. Vautard R., Yiou P., Ghil M. Singular-spectrum analysis: A toolkit for short, noisy chaotic signals // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1992. Vol. 58. P. 95–126.
4. Gourlay A. R. Hopscotch: a Fast Second-order Partial Differential Equation Solver // IMA Journal of Applied Mathematics. 1970. Vol. 6, no. 4. P. 375–390.
5. Gourlay A. R., McGuire G. R. General Hopscotch Algorithm for the Numerical Solution of Partial Differential Equations // IMA Journal of Applied Mathematics. 1971. Vol. 7, no. 2. P. 216–227.
6. Peaceman D. W., Rachford H. H. The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. 1955. Vol. 3, no. 1. P. 28–41.
7. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. М. : Физматлит, 2003.
8. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику. М. : МФТИ, 1994.