

УДК 617.713-089.819.843:519.87

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БИОМЕХАНИЧЕСКОГО ОТКЛИКА ПРИ ИНТРАСТРОМАЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ ФОРМЫ РОГОВИЦЫ

А. Б. Журавлев¹, И. С. Никитин², В. Л. Якушев³

*Институт проблем механики Российской академии наук, ¹ zhuravlev.alex2010@yandex.ru,
² i_nikitin@list.ru*

³ *Институт автоматизации проектирования Российской академии наук, yakushev@icad.org.ru*

Разработана комплексная механико-математическая модель коррекции кератоконуса роговицы глаза. Модель состоит в решении задачи совместного контактного деформирования гибких кольцевых сегментов и роговицы глаза. Деформирование кольцевых сегментов описывается дифференциальным уравнением изгиба криволинейного стержня, а деформирование роговицы глаза с дефектом рассчитывается как трехмерная упругая задача для слоя сферического сегмента со сглаженным коническим выступом на вершине методом конечных элементов.

Ключевые слова: механико-математическая модель, роговица глаза, коррекция кератоконуса, кольцевой сегмент, контактное взаимодействие, метод конечных элементов.

MATHEMATICAL MODELING OF THE BIOMECHANICAL RESPONSE OF INTRASTROMAL CORNEAL SHAPE CORRECTION

A. B. Zhuravlyov¹, I. S. Nikitin², V. L. Yakushev³

*Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, ¹ zhuravlev.alex2010@yandex.ru,
² i_nikitin@list.ru*

³ *Institute of Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences, yakushev@icad.org.ru*

The complex mechanical-mathematical model of corneal keratoconus correction is developed. The model includes the solution of the contact interaction problem for flexible ring segments and cornea. Deformation of the ring segments is described by differential equations of the curved bar bending, deformation of the cornea with a defect is calculated by the finite element method as the three-dimensional elastic problem for a spherical segment layer with rounded conical rising on the top.

Keywords: Mechanical-mathematical model, cornea, keratoconus correction, ring segment, contact interaction, finite element method.

Введение

В работе предложена механико-математическая модель интрастромальной коррекции формы роговицы глаза при кератоконусе. На основе этой модели разработан программный комплекс, позволяющий оценивать геометрические и механические параметры кольцевого сегмента, вставляемого в роговицу для коррекции дефекта.

Кератоконус (от др.-греч. *κέρας* — «рог» и *κωνος* — «конус») — заболевание глаза, при котором роговица принимает коническую форму. Кератоконус может привести к серьёзному ухудшению зрения.

Суть операции коррекции формы роговицы состоит в следующем. В ходе операции фемтосекундным лазером в структуре роговице выполняют два полукруглых микроканала для последующего помещения туда имплантов. Импланты представляют собой два кольцевых сегмента с радиусом, большим, чем радиус подготовленных каналов. Материал имплантов — полиметаметилкрилат. Эти гибкие кольцевые сегменты, вставленные в микроканалы, стремятся восстановить свою начальную форму, тем самым деформируя и растягивая роговицу. Предполагается, что при растяжении роговицы может разгладиться дефект ее формы — кератоконус.

1. Механико-математическая модель деформирования роговицы и гибкого кольцевого сегмента.

С использованием конечно-элементного программного комплекса была создана геометрическая модель склеры глаза и роговицы, показанная на рис. 1,а. На рис. 1,б в разрезе показан примерный вид роговицы с рассматриваемым дефектом кератоконуса. Этот дефект может располагаться как на оси

роговицы (создавая «конусность» ее формы, рис. 1,б), так и сместиться с оси на какой-то участок ее боковой поверхности. Будем исследовать случай осевого расположения дефекта.

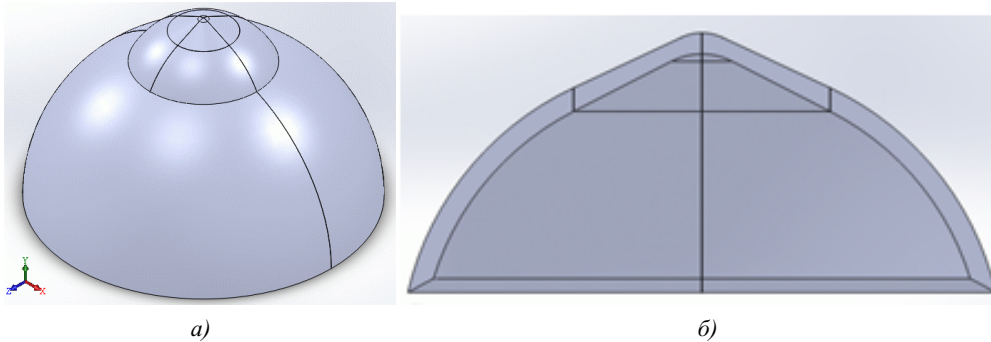


Рис. 1. Вид на склере глаза с роговицей: а) без дефекта; б) с дефектом

Расположение импланта внутри роговицы видно на рис. 2,а. На этом рисунке показан вид на склере и роговицу (четверть сферического сегмента) с вставленным внутрь нее кольцевым имплантом.



Рис. 2. Вид на роговицу с кольцевым имплантом

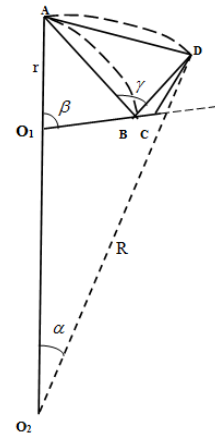


Рис. 3. Геометрическая схема смещения роговицы и изгиба импланта

Рассмотрим геометрическую схему деформирования роговицы и кольцевого сегмента. Начальная форма кольцевого сегмента — дуга AD , начальная форма канала в роговице — дуга AB (рис. 3). В этот канал в ходе операции вставляется кольцевой сегмент, который стремится восстановить начальную форму и занимает положение AC (рис. 3), тем самым деформируя и растягивая оболочку роговицы. Смещение роговицы BC и изгиб кольцевого сегмента CD образуют треугольник BDC .

Опишем исходные геометрические параметры:

$r = r_1$ — радиус микроканала в сечении роговицы, $R = R_2$ — радиус кривизны импланта (кольцевого сегмента), α — угол раствора импланта до операции, $l = R\alpha = r\beta$ — его длина.

Далее легко определить $\beta = \alpha R/r > \alpha$ — угол раствора импланта в канале, $AD = R_1 = 2R \sin(\alpha/2)$, $AB = r_1 = 2r \sin(\beta/2)$, $\angle BAD = (\beta - \alpha)/2$.

Введем обозначения:

$U = BC$ — смещение роговицы под действием импланта,

$W = DC$ — изгиб импланта с учетом смещения роговицы,

$V = BD$ — изгиб импланта без учета смещения роговицы.

По теореме косинусов $V = \sqrt{R_1^2 + r_1^2 - 2R_1r_1 \cos(\beta - \alpha)}/2$.

По теореме синусов $\sin \gamma = R_1/V \sin(\beta - \alpha)/2$, $\angle DBC = \psi = \pi/2 + \beta/2 - \gamma$.

Связь между U и W , как видно из рис. 3, имеет вид: $W^2 = V^2 + U^2 - 2VU \cos \psi$.

Будем решать контактную задачу о совместном деформировании роговицы и предварительно напряженного кольцевого сегмента, вставленного в подготовленный для него канал, приближенным методом. Этот метод основан на раздельном решении задач о деформировании роговицы и изгибе кольцевого сегмента под действием контактной распределенной нагрузки на поверхности их соприкосновения.

Найдем смещение роговицы U_0 для пробного распределенного нормального напряжения $T_0(s)$. Точное распределение нормальных напряжений по длине дуги кольцевого сегмента неизвестно. Его следует аппроксимировать с учетом минимального нулевого значения при $s=0$ и максимального амплитудного значения при $s=l$.

Будем считать нормальные напряжения распределенными по степенному закону $T_0(s) = P_0 (s/l)^k$, $k=1,2$. Приближенные решения, полученные для $k=1$ и $k=2$, будут задавать границы диапазона для точного решения.

Соответствующее этому распределению смещение роговицы U_0 находим из конечноэлементного расчета роговицы на выбранный тип нагрузки.

Распределению нормальных напряжений $T(s) = P (s/l)^k$ с искомой амплитудой P будет соответствовать смещение роговицы U .

Из линейности задачи следует

$$U = qP, \quad q = U_0/P_0.$$

Этому распределению нормальных напряжений соответствует распределенная (погонная) нагрузка, действующая на кольцевой сегмент, который будем рассматривать как гибкий, слабо искривленный стержень

$$Q(s) = T(s)d = Pd (s/l)^k.$$

Здесь d – поперечный размер кольцевого сегмента (поперечный размер площадки, к которой прикладывается распределенное нормальное напряжение).

Уравнение и граничные условия для его изгибного смещения имеют вид (E – модуль Юнга материала имплантата, J_x – момент инерции его сечения):

$$\frac{d^4 W}{ds^4} = \frac{Q(s)}{EJ_x},$$

при $s=0$ $W = W' = 0$,

при $s=l$ $W'' = W''' = 0$

Полная формулировка задачи для U , W , P имеет вид:

$$U = qP,$$

$$\frac{d^4 W}{ds^4} = P \frac{d}{l^k EJ_x} s^k, \quad W = W' = 0 \text{ при } s = 0, \quad W'' = W''' = 0 \text{ при } s = l$$

$$W^2 = V^2 + U^2 - 2VU \cos \psi$$

Опуская детали решения дифференциального уравнения, для изгиба вставки получаем:

при $k=1$ $W = q_1 P$, $q_1 = \frac{11}{120} \frac{dl^4}{EJ_x}$ – для линейного распределения контактных давлений,

при $k=2$ $W = q_2 P$, $q_2 = \frac{13}{180} \frac{dl^4}{EJ_x}$ – для квадратичного распределения контактных давлений.

Отсюда имеем уравнения для определения величины P :

$$P = \left(\sqrt{q_k^2 - q^2 \sin^2 \psi} - q \cos \psi \right) / (q_k^2 - q^2).$$

Для сечения имплантата, представляющего собой прямоугольный треугольник с катетами d и h , момент инерции равен $J_x = dh^3/36$.

С использованием значений амплитуды давления P определяем смещение роговицы U и соответствующее ему проседание верхушки роговицы по расчету методом конечных элементов. Далее определяется новая форма роговицы.

2. Конечноэлементная модель роговицы и расчеты деформирования роговицы и кольцевого сегмента

Трехмерная конечно-элементная модель роговицы с дефектом изображена на рис. 4. Фрагмент сетки вокруг микроканала в роговице со сгущением более подробно можно увидеть на рис. 5.



Рис. 4. Конечно-элементная модель роговицы с дефектом

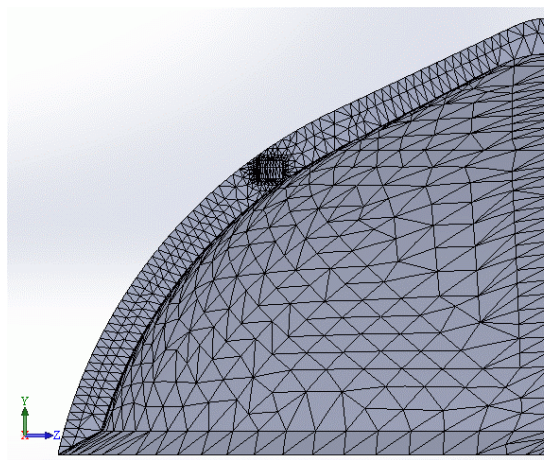


Рис. 5. Фрагмент сетки вокруг микроканала в роговице со сгущением

Основные расчеты проводились для треугольного сечения кольцевого сегмента, используемого в медицинской практике. Результаты расчетов смещений и нового профиля роговицы представлены на следующей серии рисунков (рис.6). При этом было учтено внутреннее глазное давление на склеру и роговицу $P_{рог}$.

Были выбраны следующие параметры расчетов. Модуль Юнга импланта (полиметаметилкрилат) равен $E_{имп}=2800$ МПа. Для модуля Юнга роговицы существует большая неопределенность, отмеченная в [1]. В предварительных расчетах использовались значения $E_{рог}=1.2$ МПа [2], $E_{рог}=0.54$ МПа [1, ссылка на Woo, 1972] или даже $E_{рог}=0.34$ МПа [1, ссылка на Hoeltzel, 1992]. Ниже приведены результаты для среднего значения $E_{рог}=0.54$ МПа.

Также прикладывалось внутреннее давление на склеру и роговицу, соответствующее величине внутриглазного давления $P_{рог}=0.0067$ МПа [2].

Были выбраны следующие геометрические параметры задачи:

а) $r = 3.9$ мм, $R = 4.5$ мм, б) $r = 3.4$ мм, $R = 3.9$ мм, $\beta = 80^\circ$, $h = 0.3$ мм, $d = 0.2$ мм.

Результаты расчетов показаны на рис. 6 в виде линий уровня вертикальных смещений роговицы под действием преднапряженных кольцевых сегментов для линейного распределения контактных давлений ($\kappa = 1$).

Расчетное изменение профиля роговицы после внедрения кольцевых имплантов и проявление желаемого эффекта показано на Рис. 5 - а, б для двух различных вариантов расположения подготовленных микроканалов и радиуса импланта а) $r = 3.9$ мм, $R = 4.5$ мм, б) $r = 3.4$ мм, $R = 3.9$ мм.

Вычислительные эксперименты показали, что значение показателя κ в аппроксимирующем степенном законе распределения контактных напряжений слабо влияет на результаты расчетов изменения формы роговицы под действием изгиба кольцевых сегментов.

Из приведенных графиков изменения формы роговицы видно, что наибольшее проседание роговицы наблюдается в ее центральной части. Предложенный метод моделирования операции коррекции кератоконуса позволяет проводить численную оценку механических свойств и геометрических параметров кольцевого импланта для достижения желаемого эффекта — разглаживания дефекта роговицы глаза.

Заключение

Разработана комплексная механико-математическая модель коррекции кератоконуса, которая состоит в решении задачи совместного контактного деформирования гибких кольцевых сегментов и роговицы глаза.

Предложенная механико-математическая модель позволяет численно моделировать деформа-

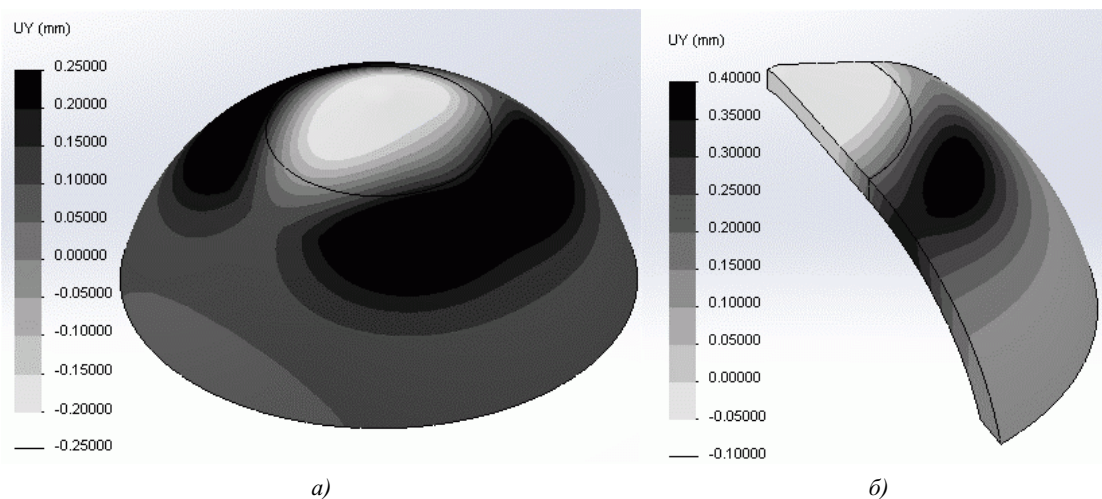


Рис. 6. Уровни вертикальных смещений роговицы

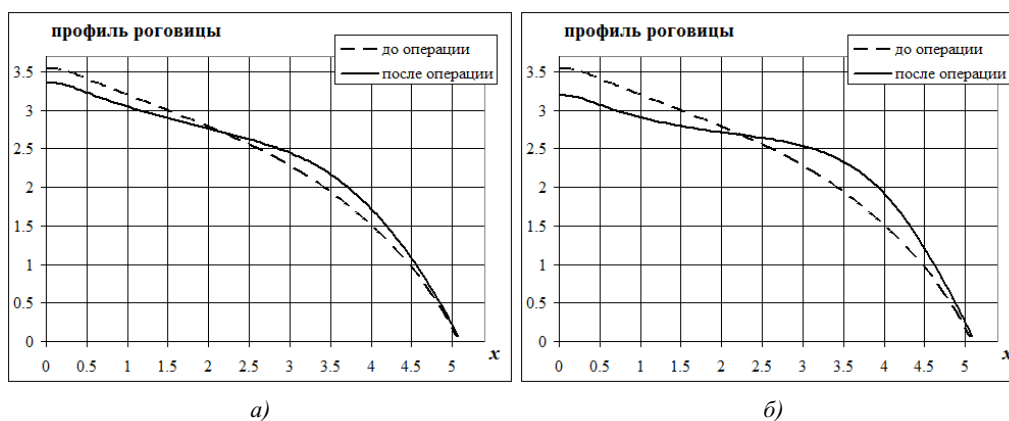


Рис. 7. Изменение профиля роговицы для различных уровней расположения импланта.

цию и изменение формы роговицы глаза при внедрении гибкого кольцевого сегмента в заранее подготовленный для него канал. С помощью этой хирургической операции возможно разглаживание дефекта роговицы (кератоконуса). Расчеты показали, что подобная процедура наиболее эффективна для коррекции дефекта при его центральном положении на оси роговицы. Для коррекции дефекта при его смещенном положении необходим индивидуальный подбор уровня расположения импланта, его угла раствора и начального радиуса кривизны.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ 15-29-03895 офи_м.

ЛИТЕРАТУРА

- Смотрич Е. А. Топография роговицы и распределение механических напряжений в ней при различных видах корнеальной хирургии : дис. ... канд. мед. наук / Е. А. Смотрич. 2014. 85 с. Режим доступа : <http://www.mntk.ru/files/upload/dis-smotrich.pdf>.
- Хусаинов Р. Р., Цибульский В. Р., Якушев В. Л. Моделирование деформации глаза при измерении внутриглазного давления оптическим методом // ЖВМ и МФ. 2011. Т. 51, № 2. С. 349–562.