УДК 531.742:519.87:004.42

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МГД-ТЕЧЕНИЙ ПРИ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ ПОТОКА

И. В. Бычин[1], А. В. Гореликов[2], А. В. Ряховский[3]
Сургутский государственный университет, [1] igor-bychin@yandex.ru, [2] gorelikov_a@list.ru, [3] echo47@rambler.ru

В статье рассматривается алгоритм и программный комплекс для численного моделирования магнитогидродинамических течений в канале с поперечным сечением произвольной формы. Представлены результаты тестовых расчетов, в которых численное решение сравнивалось с аналитическим решением, демонстрирующие корректность работы разработанного программного обеспечения. Также приводятся результаты вычислительных экспериментов по исследованию течения при заданной мощности в присутствии постоянного магнитного поля.

Ключевые слова: численное моделирование, МГД, течение в канале.

NUMERICAL MODELING OF MHD-FLOWS WITH CONSTANT POWER

I. V. Bychin[1], A. V. Gorelikov[2], A. V. Ryakhovsky[3]
Surgut State University, [1] igor-bychin@yandex.ru, [2] gorelikov_a@list.ru, [3] echo47@rambler.ru

The article considers the algorithm and software for numerical simulation of magnetohydrodynamic flows in a channel of arbitrary cross section. Tests for comparing numerical solution with analytical solution were performed; and they demonstrate the correctness of the developed software. Numerical experiments on modeling flow with constant power in the presence of constant magnetic field were carried out and their results are presented.

Keywords: numerical modeling, MHD, channel flow.

Во многих прикладных задачах магнитной гидродинамики представляют интерес течения, в которых давление и скорость жидкости на входе неизвестны, но поддерживается постоянная мощность. Исследование характеристик подобных течений необходимо при решении ряда инженерных и медицинских задач, например, при моделировании течений в кровеносных сосудах в присутствии магнитного поля.

Основа математической модели — система уравнений магнитной гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. В изотермическом случае данная система уравнений в прямоугольных координатах имеет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\,\Delta\mathbf{u} + \frac{1}{4\pi\rho}(\operatorname{rot}\mathbf{B}\times\mathbf{B}), \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}) + \nu_m\Delta\mathbf{B}, \tag{3}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{4}$$

где t — время; $\mathbf{u} = (u,v,w)$ — скорость жидкости; p — давление; $\mathbf{B}$ — индукция магнитного поля; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость; ν_m — магнитная вязкость.

Численные методы

Дискретные аналоги дифференциальных уравнений составлены при помощи метода контрольного объема [1] в прямоугольных декартовых координатах. Область жидкой фазы (например: цилиндрический канал или сферический слой) моделируется с помощью частичной или полной блокировки контрольных объемов [1], при этом используется аналог VOF (volume of fluid) метода [2]. Дискретные аналоги уравнений (1-4) получены с использованием неявной схемы и схемы со степенным законом для аппроксимации конвективных и диффузионных потоков на гранях контрольных объемов [1]. При получении дискретных аналогов уравнения Навье-Стокса и уравнения индукции использовались разнесенные расчетные сетки, т.е. компоненты скорости и индукции магнитного поля рассчитывались на гранях основных контрольных объемов. Для решения уравнений гидродинамики используется алгоритм PISO (Pressure-Implicit with Splitting of Operators) [3,4]. Алгоритм PISO выбран как наиболее эффективный для решения нестационарных задач гидродинамики вязкой жидкости в рамках метода контрольного объема. Получающиеся в результате дискретизации СЛАУ решаются параллельной модификацией метода переменных направлений.

Особый интерес с точки зрения приложений представляют задачи, в которых неизвестны скорость входящего и выходящего потока и давление на входе и выходе, а известна только мощность потока и начальные условия. Итерационная схема, позволяющая моделировать такого рода течения, предложена в работе [5].

Задача о течении в канале при постоянной мощности потока

Рассматривается течение вязкой несжимаемой жидкости в канале произвольного сечения A. Мощность течения предполагается заданной, а давление и скорость течения на входной и выходной (левой и правой) границах канала неизвестны. Мощность потока Ω пропорциональна разности давления на концах канала и объемному расходу через поперечное сечение и определяется как:

$$\Omega = (p_l - p_r)\iint_A w\,dS,$$

где p_l, p_r — давление на левой и правой границах. Давление на левой границе можно выразить через мощность, расход жидкости и давление на правой границе:

$$p_l = p_r + \frac{\Omega}{G}, \qquad G = \iint_A w\,dS,$$

где G — объемный расход жидкости через поперечное сечение канала. При этом p_r задается произвольно, например, равным 0, в силу того, что для течения несжимаемой жидкости давление определяется с точностью до постоянной.

Граничные условия можно записать следующим образом:

$$z = 0:\ \ u = 0,\ v = 0,\ p = \frac{\Omega}{G}; \tag{5}$$

$$z = H:\ \ u = 0,\ v = 0,\ p = 0. \tag{6}$$

Алгоритм решения состоит из следующих шагов:

1) Задается произвольное начальное распределение скорости. Начальное поле скорости выбирается таким образом, чтобы оно удовлетворяло уравнению неразрывности и граничным условиям.
2) По объемному расходу через левую границу рассчитывается значение давления на левой границе.
3) По алгоритму PISO решается система уравнений гидродинамики, при этом неизвестное значение компоненты скорости w на левой и правой границах определяется из уравнения неразрывности.

Этапы 2-3 составляют один шаг по времени. На следующем шаге по времени этапы 2-3 повторяются, причем в качестве начального распределения скорости используется решение, полученное на предыдущем временном слое. Далее приводятся результаты тестирования алгоритма расчета течения с постоянной мощностью в случае отсутствия магнитного поля.

Тест №1. Течение в трубе круглого сечения

Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости по каналу круглого сечения. Мощность течения Ω считается заданной. Длина канала равна H, радиус равен R_0. Плотность и вязкость жидкости постоянны: $\rho = 1$, $\mu = 1$. Математической моделью задачи является система уравнений гидродинамики:

$$(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\,\Delta\mathbf{u},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0.$$

На входной и выходной границе заданы условия (5, 6). На твердой границе ($r = R_0$) заданы условия прилипания:

$$r = R_0:\ \ u = 0,\ v = 0,\ w = 0.$$

Аналитическое решение задачи:

$$p = \frac{dp}{dz}(z - H), \quad \frac{dp}{dz} = -4, \quad w = -\frac{1}{4}\frac{dp}{dz}\left(1 - r^2\right),$$

$$\Omega = \frac{\pi}{2}\left(\frac{dp}{dz}\right)^2 H\left(\frac{R_0^2}{2} - \frac{R_0^4}{4}\right).$$

При проведении тестовых расчетов размеры канала были выбраны: $H = 4, \quad R_0 = 1$. Точность численного решения оценивалась по максимальной абсолютной ΔF и средней по области относительной δF погрешностям:

$$\Delta F = \max_G |F - F_{an}|, \quad \delta F = \frac{1}{V_G}\int_G \frac{|F - F_{an}|}{\bar{F}_{an}} d\vartheta \cdot 100\%, \quad \bar{F}_{an} = \frac{1}{V_G}\int_G |F_{an}|\, d\vartheta$$

где F_{an} — аналитическое решение; $V_G = \int_G d\vartheta$ — объём расчетной области.

Результаты расчетов приведены в таблице 1. На рисунке 1 приводятся изоповерхности компоненты скорости w для численного решения (рис. 1,а) и аналитического решения (рис. 1,б).

Таблица 1

Погрешности численного решения

$n_1{\times}n_2{\times}n_3$	Δw	δw, %	Δp	δp, %
22×22×42	$3{,}11{\cdot}10^{-2}$	3,11	0,57	3,55
32×32×62	$2{,}91{\cdot}10^{-2}$	2,08	0,26	1,61
42×42×82	$2{,}70{\cdot}10^{-2}$	1,10	$9{,}71{\cdot}10^{-2}$	$5{,}13{\cdot}10^{-3}$
52×52×102	$2{,}01{\cdot}10^{-2}$	0,87	$8{,}08{\cdot}10^{-2}$	$5{,}07{\cdot}10^{-3}$

Течение между двумя плоскостями в присутствии постоянного магнитного поля

Рассматривается течение вязкой, несжимаемой, электропроводящей жидкости между двумя плоскостями ($x = 0$, $x = H$). Течение направлено вдоль оси z. Задача решается в области $G = \{0 \le x \le H,\ 0 \le y \le H,\ 0 \le z \le 4H\}$ (характерный размер области был выбран равным $H = 1$). В промежутке $1 \le z \le 2$ приложено постоянное магнитное поле в направлении оси x, $\mathbf{B} = (B_0, 0, 0)$. Математической моделью задачи является система уравнений магнитной гидродинамики (1-4) с граничными условиями (5, 6). Безразмерными параметрами задачи являются число Гартмана и число Рейнольдса:

$$\mathrm{Ha} = \frac{HB_0}{\sqrt{4\pi\rho\nu_m\,\nu}}, \mathrm{Re} = \frac{Hw_0}{\nu},$$

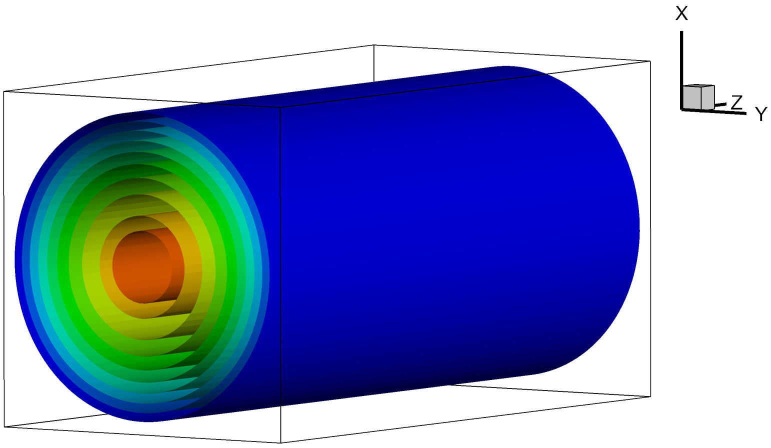
где w_0 – характерная скорость течения.

В расчетах значение числа Гартмана было выбрано равным Ha = 5. Число Рейнольдса варьировалось в пределах 0–100. На рисунке 2 представлены результаты расчетов при значениях числа Рейнольдса Re = 0, Re = 50 и Re = 100. Из рисунка видно, как с увеличением числа Рейнольдса изменяются силовые линии магнитного поля. В случае Re = 0, соответствующему отсутствию течения, линии магнитного поля не деформированы. С ростом числа Рейнольдса линии магнитного поля все более искривляются, что объясняется эффектом вмороженности силовых линий.

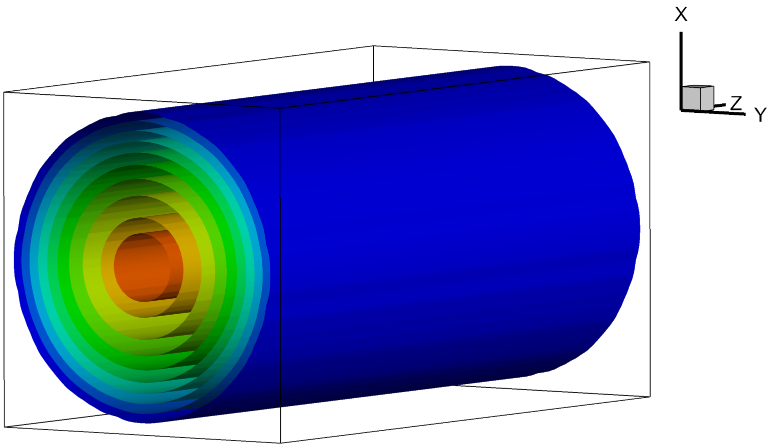
Заключение

Разработан программный комплекс для численного моделирования течений вязкой, несжимаемой, проводящей жидкости в присутствии магнитного поля. Реализован алгоритм расчета граничных условий в случае, когда значение давления и скорости на входной и выходной границах неизвестны, а задана постоянная мощность потока. Корректность численного решения продемонстрирована в тестовых расчетах, в которых численное решение сравнивалось с известным аналитическим решением. Также проведена серия вычислительных экспериментов по исследованию течения в присутствии постоянного магнитного поля, в которых продемонстрирован эффект вмороженности силовых линий.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-01-12051 офи_м, грант № 15-41-00013 р_урал_а и грант № 15-41-00059 р_урал_а.

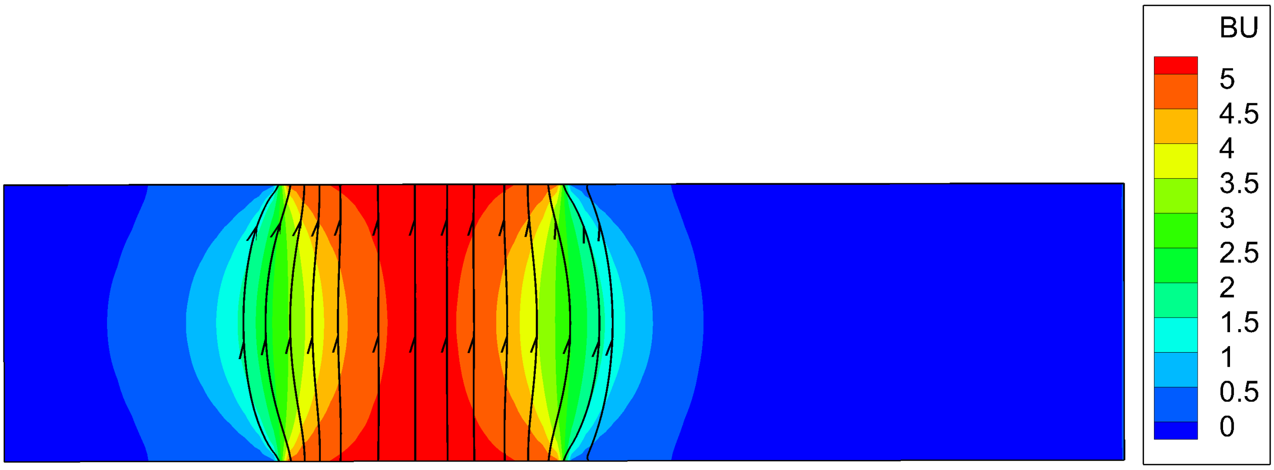


а)

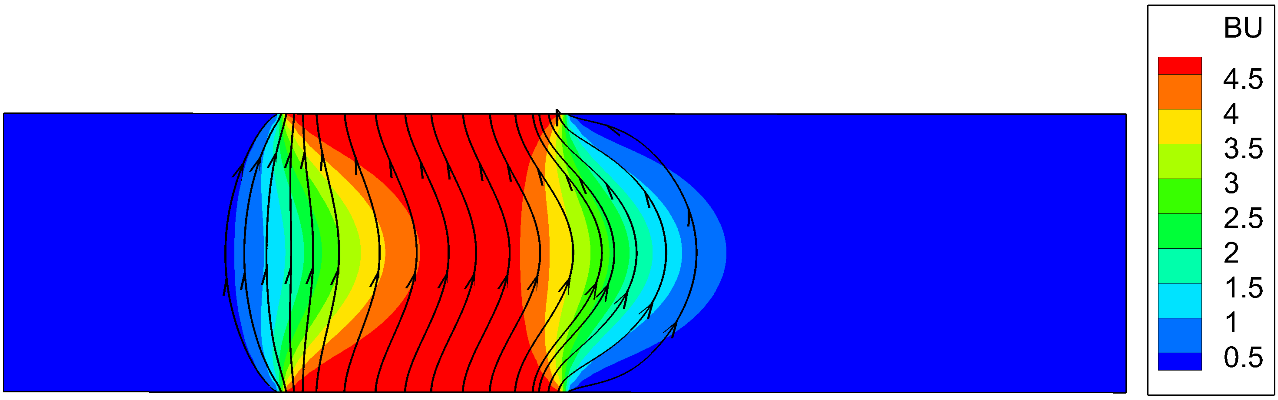


б)

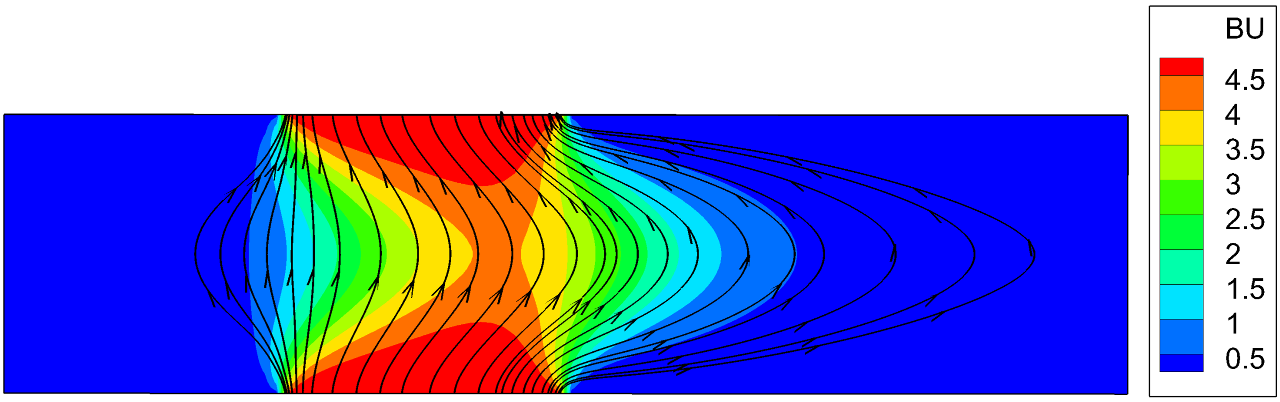
Рис. 1. *Изоповерхности компоненты скорости w: а) аналитическое решение; б) численное решение, полученное на сетке 52×52×102*



а)



б)



в)

Рис. 2. *Силовые линии магнитного поля и распределение компоненты магнитного поля B_x в плоскости, параллельной плоскости Oxz. а) Re = 0; б) Re = 50; в) Re = 100*

ЛИТЕРАТУРА

1. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М. : Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
2. Hirt C. W., Nicholls B. D. Volume of Fluid (VOF) method for dynamical free boundaries // Journal of Computational Physics. 1981. Vol. 39. P. 201–225.
3. Issa R. I. Solution on the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting // Journal of Computational Physics. 1986. Vol. 62. P. 40–65.
4. Issa R. I., Gosman A. D., Watkins A. P. The computation of compressible and incompressible recirculating flows by a non-iterative implicit scheme // Journal of Computational Physics. 1986. Vol. 62. P. 66–82.
5. Зубков П. Т., Тарасова Е. Н. Гидродинамика и теплообмен в канале с кольцевыми ребрами // ТВТ. 2004. Т. 42, № 6. С. 917–920.