

В.Л. Якушев, В.Р. Цибульский, Р.Р. Хусаинов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕТОВЫХ ПОТОКОВ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ВНУТРИГЛАЗНОГО ДАВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Внутриглазное давление выполняет важные физиологические функции. По его уровню можно судить о развитии патологических процессов, например глаукомы или помутнения водянистой влаги и стекловидного тела. Сегодня широко применяются аппланационные методы его измерения, в частности оптический, при котором на центр роговицы направляется струя воздуха, а об ее перемещении судят по отраженному пучку света. В статье численно моделируется прохождение прямого и отраженного потоков света при совместном деформировании роговицы и склеры глаза. Расчет оптической системы проводится на основе представлений геометрической оптики. Роговица и склера рассматриваются как осесимметрично деформируемые оболочки вращения с жестким закреплением по краям, пространство между которыми заполнено несжимаемой жидкостью. Для описания напряженно-деформируемого состояния роговицы и склеры используется система из шести нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Решение по нагрузке ведется пошаговым методом.

Внутриглазное давление, измерение давления, аппланационные методы, оптический метод, напряженно-деформируемое состояние роговицы и склеры.

Введение

Для объективного измерения внутриглазного давления применяют специальные устройства. В данной работе проведено численное моделирование деформации глаза при измерении давления прибором ORA (Ocular Response Analyzer) американской фирмы Reichert [1]. Принцип его работы заключается в следующем.

Пациент плотно прижимается лбом к прибору. На центр роговицы, которая изображена в виде сегмента сферической поверхности, направляется узкий луч света под определенным углом (рис. 1). Точечный источник света расположен в точке O . Свет проходит через диафрагму A , в результате чего обрезаются часть светового потока, а на роговице появляется освещенная область S . Фотоприемник находится в B , его ось направлена на центр роговицы. Он имеет ограниченные размеры, в результате в него попадает только часть светового потока, отраженного от роговицы в области Q . Затем в центр роговицы направляется струя воздуха, давление в которой меняется во времени от нуля до некоторого значения. Роговица деформируется, а отраженный световой поток меняется в зависимости от ее формы. В результате измерений на экране прибора появляется кривая от времени: зависимость давления в струе и измеряемый световой поток. На основании многочисленных опытов, в которых проводилось сравнение результатов измерения внутриглазного давления ORA и другими методами, был разработан метод интерпретации результатов ORA и получения значения внутриглазного давления. Особенностью прибора является цифровая обработка сигналов и, как следствие, более точные значения внутриглазного давления.

Вместе с тем такая экспериментальная методика интерпретации результатов измерений не позволяет полностью раскрыть все возможности прибора,

поэтому представляется актуальным математическое моделирование процесса измерения.

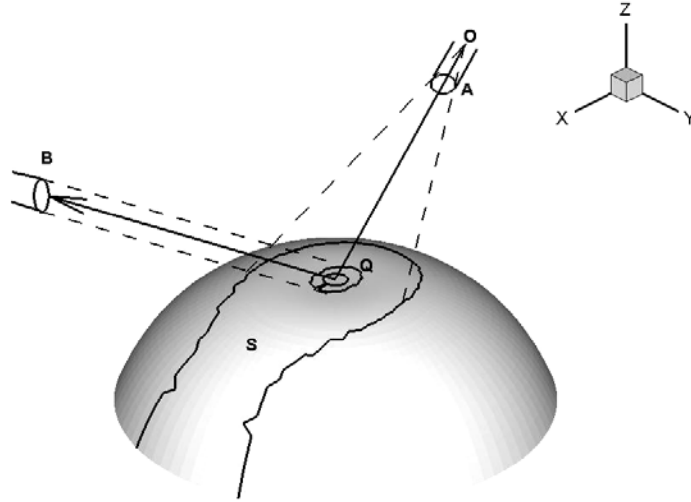


Рис. 1. Оптическая схема прибора для измерения внутриглазного давления

1. Расчет оптических потоков в системе

Схема оптической системы представлена на рис. 2. Границы потока от источника света показаны линиями OC и OD , а воспринимаемый приемником отраженный свет — между точками E и G . Угол между осью источника и осью X обозначен α_p , а для приемника — α_r . Расстояние от центра роговицы до диафрагмы A равно l_g , а от A до O — l_p , расстояние FB — l_r . Координата центра роговицы F по оси z равна z_c .

Предполагаем, что роговица имеет осесимметричную форму, а давление воздуха в центре распределено также осесимметрично. Поэтому поверхность роговицы может быть получена в результате вращения плоской кривой $X = X(s_0)$, $Z = Z(s_0)$ относительно оси z , где s_0 — длина дуги кривой вдоль поверхности роговицы, отсчитываемая от ее центра. Угол наклона между касательной к поверхности и осью x равен $\varphi(s_0)$. Значения $X(s_0)$, $Z(s_0)$ и $\varphi(s_0)$ получаются из решения нелинейной задачи о совместном деформировании роговицы и склеры (см. раздел 2). Обозначим через θ угол в окружном направлении, тогда координаты точек поверхности роговицы записываются следующим образом:

$$x = x(s_0, \theta) = X(s_0) \cos\theta, \quad y = y(s_0, \theta) = X(s_0) \sin\theta, \quad z = Z(s_0). \quad (0.1)$$

Алгоритм расчета прохождения прямого и отраженного лучей состоял в следующем. На поверхности роговицы была нанесена сетка (рис. 3), которая имела сгущение в центре. Сначала каждая ее точка соединялась прямой линией с точечным источником света O и проверялось условие прохождения луча через диафрагму A . Таким образом была построена освещаемая часть роговицы S (рис. 1). Прямой и отраженные лучи должны лежать в одной плоскости с единичным вектором нормали \mathbf{n} к поверхности роговицы. Кроме того, углы между прямым лучом и нормалью \mathbf{n} и отраженным лучом и \mathbf{n} должны быть одинаковыми. Обозначим их через ϕ . Из этих условий строился отраженный луч и определялось, попадает ли он в фотоприемник. В результате получалась область Q на рис. 2. Она может быть многосвязанной.

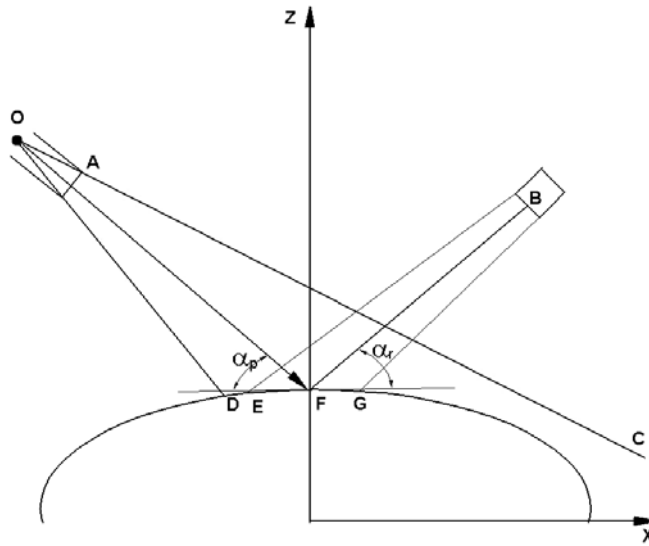


Рис. 2. Положение источника света и фотоприемника при $y = 0$

Проекции единичного вектора нормали \mathbf{n} на оси x, y, z равны:

$$a = -\sin \varphi \cos \theta, \quad b = -\sin \varphi \sin \theta, \quad c = \cos \varphi. \quad (0.2)$$

В дальнейшем координаты точки на поверхности роговицы будем обозначать с индексом 1, источника света — с индексом 2, а координаты точки пересечения отраженного луча с плоскостью, параллельной оси y и проходящей через фотоприемник, — с индексом 3.

Уравнение плоскости, параллельной оси y и проходящей через диафрагму, записывается следующим образом:

$$x \cos \alpha_p - (z - z_c) \sin \alpha_p + l_g = 0, \quad (0.3)$$

а уравнение линии, соединяющей источник света с точкой на роговице:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (0.4)$$

Запишем координаты точки пересечения луча от источника к роговице с плоскостью диафрагмы с индексом L , а центра диафрагмы — с индексом g . Первые могут быть найдены с помощью уравнений (0.3) и (0.4):

$$z_L = \left[z_c \operatorname{tg} \alpha_p + \frac{l_g}{\cos \alpha_p} + x_1 - \gamma_1 z_1 \right] [\operatorname{tg} \alpha_p - \gamma_1]^{-1}, \quad \gamma_1 = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1}, \quad (0.5)$$

$$x_L = x_1 + \gamma_1(x_2 - x_1), \quad y_L = y_1 + \gamma_1(y_2 - y_1).$$

Тогда расстояние r_g от центра диафрагмы до точки пересечения с плоскостью (0.3) равно:

$$r_g = \sqrt{(x_L - x_g)^2 + (y_L - y_g)^2 + (z_L - z_g)^2}. \quad (0.6)$$

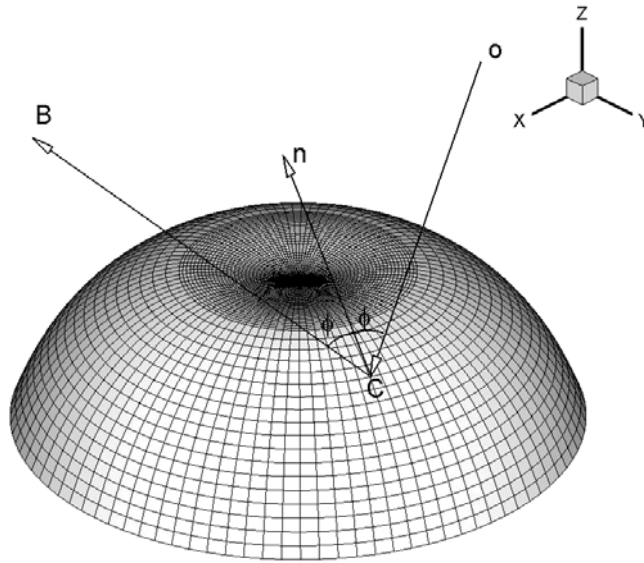


Рис. 3. Расчетная сетка на поверхности роговицы

Условием прохождения луча через диафрагму будет $r_g \leq r_d$. Все остальные лучи отсекаются. Перебирая точки на сетке, нанесенной на роговицу, и проверяя это условие, можем найти освещенную область S на рис. 1.

Уравнение плоскости π , проходящей через точки 1 и 2 и нормаль \mathbf{n} , может быть записано в виде

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. \quad (0.7)$$

Из условия прохождения плоскости π через точки 1 и 2 следует

$$(x_2 - x_1) \cos \alpha + (y_2 - y_1) \cos \beta + (z_2 - z_1) \cos \gamma = 0. \quad (0.8)$$

Для того чтобы нормаль \mathbf{n} принадлежала π , необходимо выполнение соотношения

$$a \cos \alpha + b \cos \beta + \cos \gamma = 0. \quad (0.9)$$

Тогда из (0.8) и (0.9) $\cos \alpha$ и $\cos \beta$ могут быть выражены через $\cos \gamma$, а затем они подставлены во второе соотношение (0.7). В результате получим:

$$\cos \gamma = \left[1 + \frac{[b(z_2 - z_1) - c(y_2 - y_1)]^2 + [a(z_2 - z_1) - c(x_2 - x_1)]^2}{[b(x_2 - x_1) - a(y_2 - y_1)]^2} \right]^{-1}, \quad (0.10)$$

$$\cos \alpha + \cos \gamma \frac{[b(z_2 - z_1) - c(y_2 - y_1)]}{[b(x_2 - x_1) - a(y_2 - y_1)]}, \quad (0.11)$$

$$\cos \beta = + \cos \gamma \frac{[a(z_2 - z_1) - c(x_2 - x_1)]}{[b(x_2 - x_1) - a(y_2 - y_1)]}. \quad (0.12)$$

Далее запишем уравнение для отраженного луча:

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}, \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (0.13)$$

Здесь неизвестны коэффициенты l, m, n . Косинус угла между линией 1–2 и нормалью \mathbf{n} равен:

$$\cos \phi = \frac{(x_2 - x_1)a + (y_2 - y_1)b + (z_2 - z_1)c}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}. \quad (0.14)$$

Он должен быть равен углу между линией 1–3 и нормалью:

$$la + mb + nc + \cos \phi. \quad (0.15)$$

Для принадлежности линии 1–3 плоскости π необходимо выполнение соотношения

$$l \cos \alpha + m \cos \beta + n \cos \gamma = 0. \quad (0.16)$$

Из (0.15) и (0.16) l и γ могут быть найдены через m . Используя затем второе соотношение из (0.13), получим уравнение для определения m :

$$\begin{aligned} & m^2 \left[\frac{(-b \cos \gamma + c \cos \beta)^2 + (b \cos \alpha - c \cos \beta)^2}{(a \cos \gamma - c \cos \alpha)^2} + 1 \right] + \\ & 2m \cos \phi \left[\frac{-(b \cos \alpha - a \cos \beta) \cos \alpha + (-b \cos \gamma + c \cos \beta) \cos \gamma}{(a \cos \gamma - c \cos \alpha)^2} \right] + \\ & + \frac{(\cos^2 \gamma + \cos^2 \alpha) \cos^2 \phi}{(a \cos \gamma - c \cos \alpha)^2} - 1 = 0. \end{aligned} \quad (0.17)$$

При вычислении корня этого квадратного уравнения берем знак «плюс» для $0 \leq \phi \leq \pi$ и «минус» для остальной части $\pi < \phi < 2\pi$. При $\phi = 0$ и $\phi = \pi$ $m = 0$. Другие два коэффициента вычисляются по формулам:

$$l = \frac{m(-b \cos \gamma + c \cos \beta) + \cos \phi \cos \gamma}{a \cos \gamma - c \cos \alpha}, \quad n = \frac{m(b \cos \alpha - a \cos \beta) - \cos \phi \cos \alpha}{a \cos \gamma - c \cos \alpha}. \quad (0.18)$$

Таким образом, найдено направление отраженного луча. Уравнение плоскости, параллельной оси y и проходящей через фронтальную часть фотоприемника, записывается так:

$$x \cos \alpha_r + (z - z_c) \sin \alpha_r - l_r = 0. \quad (0.19)$$

Из (0.13) находим:

$$x = x_1 + \frac{l}{n}(z - z_1), \quad y = y_1 + \frac{m}{n}(z - z_1). \quad (0.20)$$

Первое из этих соотношений подставим в (0.19) и получим значение координаты z_M пересечения отраженного луча с плоскостью фотоприемника:

$$z_M = \frac{l_r - \left(x_1 - z_1 \frac{l}{n} \right) \cos \alpha_r + z_c \sin \alpha_r}{\frac{l}{n} \cos \alpha_r + \sin \alpha_r}. \quad (0.21)$$

Координаты центра фотоприемника равны:

$$x_f = l_r \cos \alpha_r, \quad y_f = 0, \quad z_f = z_c + l_r \sin \alpha_r. \quad (0.22)$$

Расстояние от точки пересечения отраженным лучом плоскости фотоприемника (0.19) до его центра равно:

$$r_r = \sqrt{(x_M - x_f)^2 + (y_M - y_f)^2 + (z_M - z_f)^2}. \quad (0.23)$$

Условие попадания луча в фотоприемник записывается так:

$$r_r \leq r_f, \quad (0.24)$$

где r_f — его радиус. На основании этого условия можно построить область Q на поверхности роговицы, отраженные лучи из которой попадают в фотоприемник (рис. 1).

2. Нелинейные уравнения теории оболочек вращения

Решение нелинейной задачи о совместном деформировании роговицы и склеры под действием локальной нагрузки в центре роговицы подробно рассмотрено в работах [2–5]. Оно базируется на алгоритмах, описанных в [6]. Роговица и склера представлены как геометрически нелинейные упругие оболочки вращения, заполненные жидкостью, которая перетекает между ними. Для описания деформации оболочек использовалась геометрически нелинейная теория, описывающая поведение оболочки при конечных перемещениях и углах поворота. Роговица нагружается внешним равномерным давлением, распределенным по площади круга, находящегося в ее центре. В результате роговица деформируется, жидкость из-под нее перетекает в склеру, распирая ее, при этом внутриглазное давление повышается.

Здесь мы приведем только основные уравнения для теории оболочек вращения под действием осесимметричной нагрузки. Считаем толщину роговицы и склеры постоянными вдоль координаты s_0 , форма роговицы соответствует сферической поверхности. Края обеих оболочек жестко защемлены.

В системе координат x, z, θ рассмотрим [6] осесимметрично нагруженную оболочку вращения толщины h . Координаты срединной поверхности x, z , угол наклона φ между касательной к срединной поверхности и осью x при $y = 0$, радиусы кривизны в меридиональном r_1 и окружном r_2 направлениях являются известными функциями длины дуги срединной линии s_0 . Соответствующие величины в недеформированном состоянии отмечаются индексом «ноль». Нормаль к срединной поверхности направим так, чтобы касательная и нормаль составляли правую систему координат [6].

Деформации на расстоянии t по нормали от срединной поверхности вдоль меридиана ε_φ и в окружном направлении ε_θ на основании гипотез Кирхгофа — Лява равны:

$$\varepsilon_\varphi = \varepsilon_1 - tk_1, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_2 - tk_2, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{ds}{ds_0} - 1, \quad k_1 = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{10}}, \quad \varepsilon_2 = \frac{x}{x_0} - 1, \quad k_2 = \frac{\sin \varphi - \sin \varphi_0}{x_0}. \quad (1.2)$$

Координаты срединной поверхности в деформированном состоянии определяются уравнениями:

$$\frac{d\varphi}{ds_0} = k_1 + \frac{1}{r_{10}}, \quad \frac{dX}{ds_0} = (1 + \varepsilon_1) \cos \varphi, \quad \frac{dZ}{ds_0} = (1 + \varepsilon_1) \sin \varphi. \quad (1.3)$$

Кроме того, должны выполняться условия совместимости деформаций:

$$\frac{d\varepsilon_2}{ds_0} = \frac{1}{X_0} [(1 + \varepsilon_1) \cos \varphi - (1 + \varepsilon_2) \cos \varphi_0], \quad \frac{dk_2}{ds_0} = \frac{1}{X_0} \left[\left(\frac{d\varphi_0}{ds_0} + k_1 \right) \cos \varphi - \left(\frac{d\varphi_0}{ds_0} + k_2 \right) \cos \varphi_0 \right]. \quad (1.4)$$

Уравнения равновесия в случае малых смещений и углов поворота записываются для деформированного состояния следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_\varphi}{ds_0} + (1 + \varepsilon_1) \frac{N_\theta \sin \varphi + Q_\varphi \cos \varphi}{X} + N_\varphi \left(k_1 + \frac{d\varphi_0}{ds_0} \right) + p_z &= 0, \\ \frac{dN_\varphi}{ds_0} + (1 + \varepsilon_1) \frac{N_\varphi - N_\theta}{X} \cos \varphi - Q_\varphi \left(k_1 + \frac{d\varphi_0}{ds_0} \right) + p_\varphi &= 0, \\ \frac{dM_\varphi}{ds_0} + (1 + \varepsilon_1) \frac{M_\varphi - M_\theta}{X} \cos \varphi - Q_\varphi &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где Q_φ — поперечная сила, N_φ и N_θ — нормальные силы, M_φ и M_θ — изгибающие моменты, p_φ и p_θ — соответственно касательная и нормальная к срединной поверхности составляющие внешней распределенной нагрузки.

Решение задачи будем вести на основе метода дополнительной [6]. Простейшей моделью ползучести, позволяющей смоделировать непрерывный процесс перехода от докритического к закритическому состоянию без учета инерционных сил, является тело Фойхта:

$$s_{ij} = 2G(\tau \dot{e}_{ij} + e_{ij}), \quad K\sigma = \tau \dot{\varepsilon}, \quad (1.6)$$

где e_{ij} и s_{ij} — девиаторы деформаций и напряжений. Точка над переменной означает дифференцирование по времени t , а τ — постоянная.

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}, \quad K = \frac{1-2\nu}{E}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (1.7)$$

где ε_{ij} и σ_{ij} — соответственно компоненты тензоров деформаций и напряжений, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона. При $\dot{e}_{ij} = 0$ получаем закон Гука.

При введении реологической вязкости, согласно (1.6), получаем выражения для нормальных сил и моментов:

$$N_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2 + \tau(\dot{\varepsilon}_1 + \nu\dot{\varepsilon}_2)], \quad M_\varphi = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [k_1 + \nu k_2 + \tau(\dot{k}_1 + \nu\dot{k}_2)], \quad (1.8)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 + \tau(\dot{\varepsilon}_2 + \nu\dot{\varepsilon}_1)], \quad M_\theta = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} [k_2 + \nu k_1 + \tau(\dot{k}_2 + \nu\dot{k}_1)] \quad (1.9)$$

В силу приближенности теории оболочек в ней нет необходимости в выражении для связи между силой Q_φ и сдвиговой деформацией. Замкнутая система уравнений получается и без этого соотношения. Но для того чтобы иметь единообразные выражения типа (1.8) и (1.9) для всех силовых факторов, которые необходимы для записи разрешающей системы уравнений, по аналогии с (1.8) для поперечной силы Q_φ формально вводится величина γ [6]:

$$Q_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\gamma + \tau\dot{\gamma}). \quad (1.10)$$

Построение разрешающей системы уравнений осуществлялось в такой последовательности [6]. Выражения для сил и моментов (1.8)–(1.9) подставлялись в уравнения равновесия (1.5). Производные $\partial^2 \varepsilon_2 / \partial s_0 \partial t$ и $\partial^2 k_2 / \partial s_0 \partial t$ брались из продифференцированных по t соотношений совместности (1.4). Аналогично находились $\partial \varepsilon_2 / \partial t$ и $\partial k_2 / \partial t$ из (1.2).

Другие три уравнения были получены после дифференцирования по t выражений для координат срединной поверхности (1.3) и последующего сложения с ними в исходной форме.

В результате была получена система шести уравнений в частных производных, ее вид соответствует канонической форме уравнений гиперболического типа [4]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial s_0 \partial t} + A \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial s_0} + B \right\} = 0. \quad (1.11)$$

Компоненты Φ являются функциями пространственной координаты s_0 и времени t и определяются равенством

$$\Phi = [\gamma, \varepsilon_1, k_1, \varphi, X, Y]^T. \quad (1.12)$$

Матрицы A и B размером 6×6 являются функциями компонент Φ , которые, в свою очередь, являются функциями времени t и координаты s_0 .

Статической задаче соответствуют уравнения (1.8)–(1.10), но при равных нулю скоростях $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = k_1 = k_2 = \gamma = 0$. Поэтому статической задаче соответствуют уравнения, стоящие в фигурных скобках:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s_0} + B = 0.$$

Ее решение получается асимптотически из системы (1.11) при стремлении $\gamma, \varepsilon_1, k_1$ и $\dot{\varphi}, \dot{x}, \dot{y}$ к нулю.

В общем случае опирания и нагружения на каждом из краев оболочки могут быть заданы три условия вида [5]:

$$s_0 = 0, \quad D^1 \dot{\Phi} + G^1 = 0; \quad s_0 = L, \quad D^2 \dot{\Phi} + G^2 = 0. \quad (1.13)$$

Матрицы $D^1 = [d_{lm}^1]$, $G^1 = [g_m^1]^T$, $D^2 = [d_{lm}^2]$, $G^2 = [g_m^2]^T$ ($l = 1, \dots, 6$, $m = 1, 2, 3$) являются функциями Φ и могут меняться во времени.

Краевая задача является задачей Гурса — Римана. Интегрирование ведется в характеристическом колодце, ограниченном снизу характеристикой $t = 0$, а по краям — характеристиками $s_0 = 0$ и $s_0 = L$. Предполагается, что при $t = 0$ функция $\Phi(s_0)$ задана.

Решение велось пошаговым методом, для каждого набора значений нагрузки p_φ и p_z итерационный процесс проводился до установления, когда скорость $|\partial \Phi / \partial t|$ становилась меньше предварительно заданной величины, определяющей ошибку вычислений.

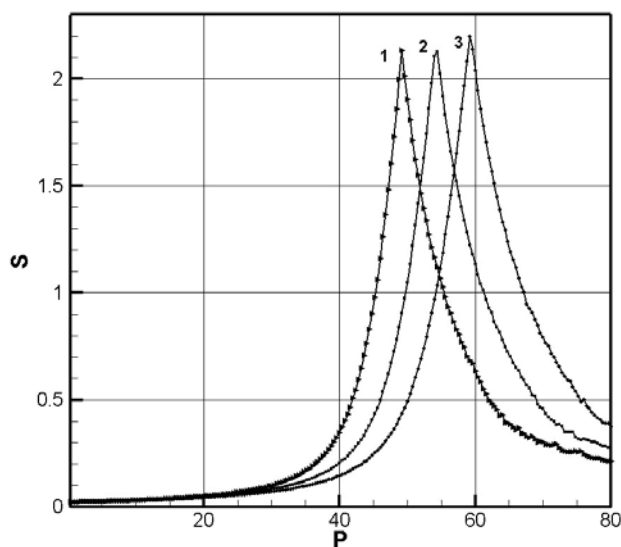


Рис. 4. Зависимость между давлением в струе воздуха P (мм рт. ст.) и площадью S (мм²) области на роговице, с которой отраженный свет попадает в фотоприемник, для значений внутреннего давления 20, 25 и 30 мм рт. ст.

Скорости неизвестных могут быть приближенно заменены через отношение конечных приращений $\Delta\Phi_l = \Phi(t_l) - \Phi(t_{l-1})$ к приращению времени $\Delta t_l = t_l - t_{l-1}$, $l = 1, \dots, N_t, t_0 = 0$:

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right|_{t=t_l} \approx \frac{\Delta\Phi_l}{\Delta t_l}, \quad (1.14)$$

где N_t — число шагов по времени до получения решения. Тогда система (1.11) может быть сведена к следующему виду:

$$\frac{d\Delta\Phi_l}{ds_0} + A|_{t=t_l} \Delta\Phi_l + \frac{\Delta t_l}{\tau} \left\{ \left. \frac{\partial\Phi}{\partial s_0} \right|_{t=t_l} \right\} = 0. \quad (1.15)$$

Если при некотором $t = t_l$ известно распределение $\Phi(t_l, s_0)$ вдоль s_0 , то могут быть найдены $\partial\Phi/\partial s_0$, матрицы A и B как функции от s_0 . Величина $\Delta\Phi_l$ на рассматриваемом временном слое при каком-либо значении времени t_l является функцией только координаты s_0 . Тогда в системе (1.15) известны коэффициенты и по отношению к приращениям $\Delta\Phi_l$ система (1.15) будет системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [6]. Определив $\Delta\Phi_l$, можно найти значение функций для следующего значения времени t_{l+1} , а именно как сумму $\Phi_{l+1} = \Phi_l + \Delta\Phi_l$, и далее повторять процесс до установления решения. Производные по координате s_0 аппроксимировались конечно-разностной схемой второго порядка точности. На каждом временном слое двухточечная краевая задача решалась методом ортогональной прогонки Годунова [6]. По t использовалась схема

первого порядка точности с переменным шагом. При этом для ряда точек для образующей необходимо хранить в памяти ЭВМ компоненты Φ с предыдущего шага по t . Более подробно весь процесс численного решения описан в [6].

Проблема выбора параметра вязкости τ не существует, так как может быть введено безразмерное время $T = t/\tau$, и решение будет функцией от T .

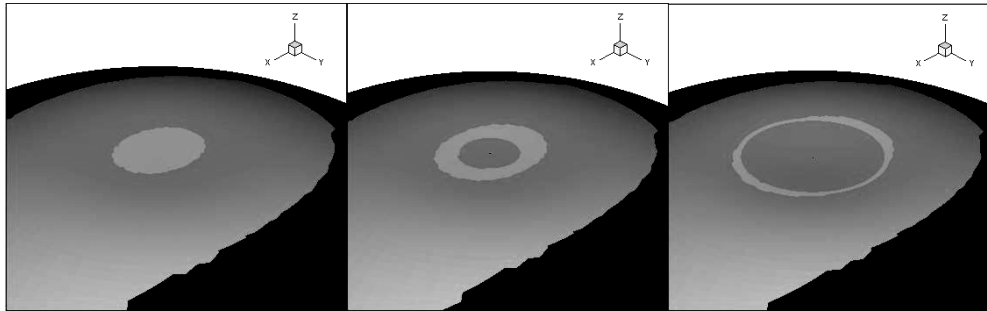


Рис. 5. Освещенные и неосвещенные области на поверхности роговицы для значений давления в струе 48,0; 51,2; 59,2 мм рт. ст.

3. Деформация роговицы глаза

В общем случае предполагалось, что срединная форма роговицы соответствует параболе, а склеры — эллипсу. Однако из-за отсутствия достаточного количества исходных данных их форма соответствовала сегментам сфер. В расчетах было принято: радиус роговицы 0,008 м, высота подъема 0,00493 м, радиус основания 0,00739 м, радиус склеры 0,012 м, коэффициенты Пуассона равны 0,45, модули упругости соответственно $1,2 \cdot 10^6$ и $6,0 \cdot 10^6$ Па, толщина роговицы 0,00045 м, склеры — 0,001 м. Радиус области, где прикладывается давление, 0,0015 м. Углы $\alpha_p = \alpha_r = \pi/4$, $l_g = 0,034$ м, $l_p = 0,03$ м, $l_r = 0,034$ м, диаметр диафрагмы 0,0025 м, диаметр фотоприемника 0,0015 м.

Расчет был проведен для трех значений внутриглазного давления: $P_i = 20$, 25 и 30 мм рт. ст. На рис. 4 даны зависимости между давлением в струе воздуха P (мм рт. ст.) и площадью S (мм²) поверхности, с которой отраженный свет попадает в фотоприемник. Соответствующие кривые обозначены цифрами 1, 2 и 3. На рис. 5 для трех значений давления (48,0; 51,2; 59,2 мм рт. ст.) при $P_i = 20$ мм рт. ст. показаны различные области: черный — неосвещенная поверхность, серый — освещенная часть, но отраженный свет с нее не попадает в фотоприемник, светлый — отраженный свет попадает в фотоприемник. Как видно, вначале свет отражается от центра роговицы, но затем по мере углубления — уже только от периферии. Полученный результат очень важен, так как экспериментов по исследованию формы области для отраженного света ранее не проводилось, а это необходимо для правильной интерпретации результатов измерения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lusce D., Taylor D. Reichert Ocular Response Analyzer. Measures Corneal Biomechanical Properties and IOP. Reichert Ophthalmic Instruments. 2006.
2. Якушев В.Л., Хусаинов Р.Р., Цибульский В.Р. Совместная деформация роговицы и склеры глаза с учетом перетекания жидкости // Материалы VII Международной конф. по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2008), 24–31 мая 2008 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2008. С. 449–451.

3. Хусаинов Р.Р. Математическое моделирование нелинейных деформаций роговицы глаза // Вестн. кибернетики. Тюмень: Изд-во ИПОС СО РАН, 2008. № 7.

4. Якушев В.Л., Цибульский В.Р., Хусаинов Р.Р. Математическое моделирование нелинейных деформаций роговицы и склеры глаза // Тез. докл. IV Всерос. конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова (Абрау-Дюрсо, 15–21 сент. 2008 г.). 2008. С. 75–76.

5. Якушев В.Л., Бубнова И.А., Цибульский В.Р., Хусаинов Р.Р. Математическое моделирование деформации глаза при измерении внутриглазного давления // Материалы XVI Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2009), 25–31 мая 2009 г., Алушта. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. С. 774–776.

6. Якушев В.Л. Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 2004. 276 с.

V.L. Yakushev, V.R. Tsubulsky, R.R. Khusainov

NUMERICAL SIMULATION OF LIGHT FLUXES
UNDER INTRAOCULAR PRESSURE MEASUREMENT USING AN OPTICAL METHOD

Intraocular pressure performs important physiological functions. By its level, one could judge on development of pathological processes, for instance, glaucoma or dimming of serous tumor and vitreous body. Today, subject to wide use being aplanatic methods of its measurement, in particular, an optical one, when the cornea centre is directed by light flux, while its transfer being judged by the reflected light flux. The article gives numerical simulation as to passing of direct and reflected light fluxes under combined deformation of eye's cornea and sclera. The calculation of the optical system is made using notions of geometric optics. Cornea and sclera are treated as asymmetrically deformed rotation shells with rigid fastening at the edges, with the space between them filled with incompressible liquid. In order to describe stressed-and-deformed state of cornea and sclera, they used a system of six nonlinear ordinary first order differential equations. The solution on stress is made using step-by-step method.

Intraocular pressure, pressure measurement, aplanatic methods, optical method, stressed-and-deformed state of cornea and sclera.