УСТОЙЧИВОЕ РАЗВИТИЕ

М.Г. Ганопольский

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРРИТОРИАЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрена задача, связанная с обслуживанием (обходом) заявок, расположенных на некоторой территории. Число заявок меняется от обхода к обходу, а их координаты представляют собой реализацию двумерной случайной величины. Показано, что для случая равномерного распределения координат заявок на плоскости средняя величина длины пути обхода заявок пропорциональна корню квадратному от их числа (параболическая зависимость). Для более сложных случаев описана идея алгоритма моделирования методом Монте-Карло.

Территориальное обслуживание, двумерная случайная величина, геометрические вероятности, метод Монте-Карло.

Рассматриваемая задача могла бы быть названа «Задачей о доставке телеграмм», поскольку связана с обходом однотипных пунктов обслуживания, расположенных на некоторой территории. От обхода к обходу число этих пунктов (заявок) и их координаты изменяются случайным образом. При этом подлежат оценке или нормированию затраты, обусловленные преодолением маршрута обхода, а не только непосредственным обслуживанием заявок («вручением телеграмм»).

Подобные ситуации (и соответствующие им задачи) возникают при организации работы участковых врачей, расчете численности ремонтных бригад, а также контролеров, диагностов и другого персонала, выполняющего функции обходчиков аварийных заявок. Встречаются они и при оценке транспортных и иных эксплуатационных расходов, зависящих от расстояний и маршрутов обслуживания. Ядром постановки и решения данных задач становится характер зависимости средней величины длины пути обхода заявок от их числа.

В практике нормирования в таких случаях обычно принимается за основу линейная зависимость

$$Z_n = n \cdot z_1 + z_0,$$

где n — число заявок; z_1 — средние затраты на обслуживание одной заявки; z_0 – условно постоянные затраты.

Эта формула подсчета вполне оправданна, если имеет место периодичность заявок (например, при профилактике или же планово-предупредительном ремонте) и незначительное варьирование их числа и мест расположения. Однако ясно, что если диапазон изменения числа заявок достаточно велик и при этом от обхода к обходу не исчерпывает множества точек их возможного возникновения, то для учета реальных затрат характер зависимости нужно знать более точно. Казалось бы, если в этих условиях задать вероятностный закон распределения координат заявок, то можно аналитически вывести формулу, связывающую математическое ожидание длины пути с числом обслуживаемых заявок. Но в действительности, когда речь идет о геометрических вероятностях, регулярные задачи с адекватной аналитической постановкой встречаются довольно редко [2]. Это побуждает обратиться к эвристическим методам и моделям [1].

Пониманию закономерности, которой подчиняется искомая зависимость, может способствовать простейшая эвристическая модель территориального обслуживания. Предположим, что *n* заявок распределены по территории «приблизительно равномерно», а именно: территория разбита на *n* участков равной площади, по конфигурации максимально приближенных к кругу и содержащих единственную заявку, расположенную в центре. Как известно, роль такого «паркета» могут выполнять правильные треугольники, составленные из них шестиугольники (соты) и квадраты.

Если территория устлана квадратами, путь обхода представляет собой замкнутую ломаную линию, состоящую из 2*n* звеньев. Каждое звено – это вход в многоугольник или выход из него. Обходчик в зависимости от маршрута проходит квадрат по прямой или поворачивает под прямым углом, но в любом случае совершает внутри него путь, равный длине квадрата. Если площадь территории — *S*, то длина квадрата *a* = $\sqrt{\frac{s}{n}}$. В таком случае длина пути обхода $L_n = na = \sqrt{Sn}$, т.е. пропорциональна не числу заявок (как в большинстве практикуемых формул), а корню квадратному из этого числа (!). Следовательно, можно говорить не о линейном, а о параболическом характере зависимости.

Покажем, что такого рода зависимость сохраняется и в тех случаях, когда содержанию задачи больше соответствует гексагональная решетка, хотя конкретный вид формулы при этом будет несколько иным.

По-прежнему в маршруте обхода будет 2*n* звеньев, но длина каждого звена может принимать одно из двух значений: радиуса описанной окружности (*R*) либо радиуса вписанной окружности (*r*) шестиугольника. Зависит это от того, как складывается маршрут обходчика при подходе к конкретному шестиугольнику и выходе из него. Поэтому в данном случае удается дать лишь интервальную оценку длины пути обхода:

$$nr \le L_n \le nR.$$

Преобразуем это выражение, принимая площадь обслуживаемой территории равной *S*. Тогда площадь единичного участка равна $\frac{s}{n}$, и в итоге получаем:

$$\sqrt[4]{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{S} \cdot \sqrt{n} \le L_n \le \sqrt[4]{\frac{4}{27}} \cdot \sqrt{S} \cdot \sqrt{n}.$$

То есть и в случае гексагонального разбиения сохраняется тот же вид функциональной зависимости: оценочные границы длины пути обхода пропорциональны корню квадратному из числа заявок.

В более сложных случаях при решении подобных задач не обойтись без моделирования процесса территориального обслуживания методом статистических испытаний (Монте-Карло). Конечно, при этом будет получена лишь численная, а не аналитическая форма оценки среднего пути, зато особенности реальной ситуации учитываются методом более полно и адекватно.

В целом алгоритм численной оценки средней длины пути обхода на основе метода Монте-Карло достаточно прост и очевиден. Задаются границы моделируемой территории в соответствующем масштабе и закон распределения двумерной случайной величины на этом множестве (в дискретном или континуальном виде). Затем для фиксированного *i* = 2, 3, 4, …., *n* разыгрывается серия случайных точек на участке плоскости, моделирующем территорию обслуживания. В рамках этой реализации необходимо проложить маршрут обхода заявок. Зачастую данный маршрут уже предопределен реальной ситуацией: например, возможные трассы обхода заявок заданы существующей сетью дорог. Если же все (или почти все) точки обслуживания попарно связаны между собой, то возникает вопрос автоматической прокладки маршрута. Понятно, что если прокладывать маршруты случайным образом, то оценка средней длины пути обхода будет явно завышенной. Поэтому приходится решать для каждой реализации *Задачу коммивояжера*. При небольшом числе заявок это можно сделать путем полного перебора вариантов. Но если число пунктов достаточно велико, до искомых численных оценок так и не удастся дойти по причине огромных временных затрат на вычисления. Поэтому надо задать алгоритм, позволяющий прокладывать маршрут автоматически, но достаточно экономным способом. Один из таких эвристических приемов, дающий неплохие субоптимальные результаты, состоит в движении от случайно выбранной начальной точки до ближайшей к ней. Затем – от достигнутой точки до ближайшей из оставшихся. Тем самым число вариантов перебора растет в арифметической прогрессии, а не факториально, как при полном переборе всех ориентированных цепочек. Еще один экономный эвристический механизм нахождения субоптимального (а в ряде случаев и оптимального) маршрута состоит в применении «Метода трех сумм» [2].

После того как маршрут обхода проложен, подсчитывается его протяженность L_i и разыгрывается следующая серия из i случайных точек. После необходимого числа реализаций подсчитывается средняя длина пути обхода для данного i. Понятно, что по мере увеличения i разброс значений уменьшается. Поэтому можно организовать процесс подсчета средних начиная с достаточно больших i, а затем экстраполировать график в сторону уменьшения аргумента.

В свое время указанный алгоритм был нами опробован для некоторых регулярных фигур, моделирующих территорию обслуживания: прямоугольник, круг, эллипс. Плотность распределения вероятностей возникновения заявок предполагалась разномерной, а способ прокладки маршрута соответствовал описанному выше. При этом подтвердилась гипотеза о параболической зависимости средней длины пути обхода от числа точек обслуживания. А это означает, что в большинстве случаев для практики нормирования можно воспользоваться приведенными формулами.

Теперь мы хотели бы остановиться на некоторых следствиях из предпринятого выше рассмотрения.

До сих пор речь шла лишь о пути обслуживании, а не о временных затратах, поскольку последние складываются из нескольких слагаемых. Время на преодоление расстояния по маршруту обхода заявок — лишь одно из этих слагаемых. Если скорость обхода (объезда) заявок постоянна либо незначительно различается на отдельных участках пути, то ясно, что аналитическая или же численная оценка предстоящих затрат больших трудностей не составляет. В более сложных случаях можно рекомендовать сразу моделировать временные характеристики обслуживания методом Монте-Карло.

Кроме того, мы считали территорию неизменной и все параметры связывали только с ростом числа заявок. Если же происходит приращение территории, то выведенные формулы дают ответ и на вопрос о коэффициенте пересчета для установленных ранее значений. Нетрудно догадаться, что он равен корню квадратному из отношения площадей. Поэтому нет необходимости заново производить нормирование по всему спектру, а равно и моделирование новой территории. Можно обойтись лишь контрольными замерами для проверки справедливости формулы пересчета.

Предположим теперь, что число заявок одного маршрута (например, в одну из смен обслуживания) вчетверо больше числа заявок другого. В таком случае длина маршрута возрастет в среднем лишь в два раза. При неизменной скорости в два раза возрастет и среднее время обслуживания. С другой стороны, увеличение скорости обслуживания в k раз теоретически приводит к росту производительности труда обходчика в k^2, а практически — создает значительные резервы для ускорения доставки, равно как и для расширения территории обслуживания. То есть, когда решается вопрос о выборе транспортных средств, оптимально соответствующих реальному процессу обслуживания, выведенные формулы оказываются весьма полезными. Эту же особенность параболической зависимости следует иметь в виду при расчете численности обслуживающих бригад. Конечно, здесь возникают конкретные вопросы об интенсивности поступления заявок, контрольных сроках их исполнения, но учет нелинейного характера зависимости во всех случаях позволяет правильно перераспределить резервы, в том числе временные, и эффективно их использовать.

Подведем итоги нашего рассмотрения.

В первую очередь, оно преследовало конкретную цель: показать, как уточнение зависимости, связывающей два фактора процесса территориального обслуживания, способно повлиять на совершенствование его организационных и технико-экономических характеристик. Вторым планом здесь проходит мысль о необходимости учета пространственного характера производства, включении времени и пространства в экономико-математические модели, так сказать, на равных условиях. Это особенно важно для тех производств, у которых пространственная привязка является сущностной чертой организации и функционирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джонс Дж. К.* Методы проектирования. М.: Мир, 1986. С. 325-326.
2. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972.
3. *Рихтер К.Ю.* Транспортная эконометрика. М.: Транспорт, 1982.

M.G. Ganopolsky

ON ONE PROBLEM OF TERRITORIAL SERVICE

Subject to consideration being a problem connected with servicing (tracing) applications located on certain territory. A number of applications is changed from tracing to tracing, while their coordinates represent realization of two-dimensional random variable. It is shown that for a case of uniform distribution of the applications' coordinates on the plane, an average value regarding the length of the path of the applications' tracing is proportional to the square root of their number (a parabolic dependence). For more complex cases, the paper describes an idea of simulation algorithm using Monte Carlo method.

Territorial service, two-dimensional random variable, geometric probabilities, Monte Carlo method.